This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

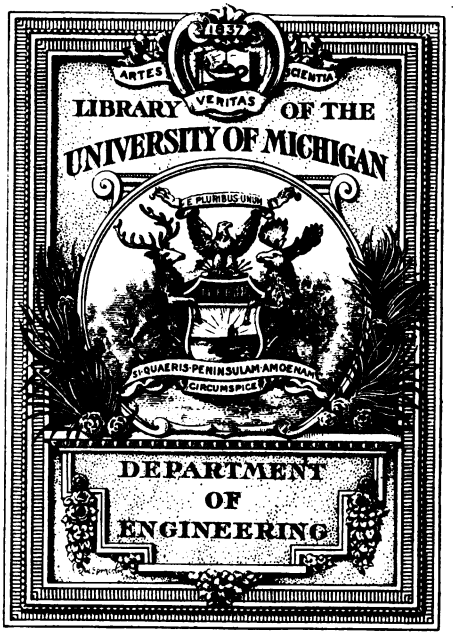
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

ENG
L
V
5
.P

Octave DOIN, éditeur, 8, place de l'Odéon, Paris.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

BIBLIOTHÈQUE

DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : **M. D'OCAGNE**

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'École des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

Le terme de mathématiques appliquées est par lui-même assez vague. Étendu à toutes les branches de la science qui font appel à l'emploi des mathématiques, il engloberait un domaine immense dans lequel viendraient se fondre nombre d'autres sections de l'Encyclopédie. Dans le plan général de celle-ci, il est réservé aux seules catégories suivantes :

1° *Science du calcul ;*

2° *Analyse appliquée à la science de la valeur ;*

3° *Géométrie appliquée à la détermination des positions et à la représentation des figures terrestres.*

I. — L'exécution des *calculs numériques* joue, dans un très grand nombre de techniques, un rôle aujourd'hui primordial. On doit s'efforcer de la rendre aussi rapide et aisée que possible, en l'appropriant exactement au degré d'approximation que l'on recherche, et en écartant, autant que faire se peut, les chances d'erreurs. L'étude des méthodes à suivre à cet effet, formant une sorte de prolongement des mathématiques pures, mérite d'être considérée comme une science à part, celle du calcul proprement dit, dont les principes sont de la plus haute utilité pour tous ceux qui, dans un ordre d'application quelconque, ont à exécuter sur des nombres des opérations plus ou moins compliquées.

L'effort du calculateur a pu d'ailleurs être largement soulagé grâce à l'intervention de procédés soit *graphiques*, soit *mécaniques*, de formes très diverses. Ces différents modes de calcul constituent aujourd'hui, à côté des méthodes purement numériques, des disciplines autonomes comportant des exposés d'ensemble spéciaux que l'on trouvera dans la première section de cette bibliothèque.

II. — La *science de la valeur*, sous ses divers aspects, repose essentiellement sur les notions de nombre et de fonction ; elle peut donc apparaître comme une application directe de l'analyse mathématique.

La pratique des opérations monétaires, toutes les combinaisons du prêt à intérêt, ont donné naissance à l'*arithmétique des changes* et à l'*algèbre financière*, dont l'exposé fournit la matière d'un premier volume.

Le calcul des probabilités a introduit dans les rapports économiques un nouvel élément de précision et fourni une base scientifique à l'industrie des assurances, dont les résultats restent la meilleure preuve de sa valeur pratique. L'étude spéciale des probabilités relatives à tous les sinistres susceptibles d'assurance, la combinaison de ces probabilités avec le jeu de la capitalisation, les moyens de calcul aptes à définir pratiquement les primes et réserves de tous les contrats, constituent la *théorie mathématique des assurances*, fondement de l'actuariat, à laquelle un second volume est consacré.

En dehors de ces applications pratiques déjà classiques, des tentatives nouvelles se sont produites pour emprunter à l'analyse mathématique toutes les rigueurs de notation et de raisonnement permettant de soumettre l'ensemble même des manifestations de la vie économique à une étude vraiment scientifique. Un mouvement s'affirme qui, rompant avec le verbalisme incertain des écoles et des doctrines, toujours dominé par les préoccupations pratiques, entend rester exclusivement théorique et constituer, — comme cela a été fait en physique, — une économique mathématique ou rationnelle et une économique expérimentale destinées à se contrôler, à se rejoindre même sur certains points lorsque la tâche sera suffisamment avancée.

La première abstrait des réalités économiques des types définis et des mécanismes simplifiés dont elle s'efforce de poser les conditions d'équilibre et de mouvement, en tendant à les ramener aux équations de Lagrange qui se trouveraient ainsi dominer un jour la mécanique des intérêts comme celle des forces. La seconde, ne pouvant recourir à l'expérience proprement dite, s'applique à perfectionner l'observation statistique, à en grouper les résultats, à en éliminer par l'interpolation les influences secondes. Elle soumet à des règles rationnelles les moyens de rechercher, de contrôler, de démontrer les corrélations entre les phénomènes ainsi rendus comparables. Deux volumes exposeront l'état actuel et les perspectives de cette double science en formation : l'*Économique rationnelle*, d'une part; la *Statistique mathématique*, de l'autre,

L'ensemble des volumes groupés dans la seconde section de cette bibliothèque se trouve ainsi constituer un exposé complet de ce qu'on appelle parfois la *chrématistique*.

III. — En vertu de ses origines mêmes, la géométrie est avant tout la science de la mesure des objets terrestres et de la détermination de leur forme. Par suite d'une évolution toute naturelle, elle est devenue, par le fait, la science générale des propriétés de l'espace. Il n'en est pas moins vrai que l'on doit, parmi ses applications, faire une place à part à celles qui visent son objet primitif, en les groupant en un seul tout, alors même que, pour plusieurs d'entre elles, il est fait appel, dans une certaine mesure, à des notions empruntées à d'autres sciences comme l'astronomie et la physique.

Au premier rang des objets terrestres, dont la mesure utilise les méthodes de la géométrie, s'offre la terre elle-même, dont la *géodésie* définit la figure d'ensemble tandis que la *topographie* fait connaître les détails de sa surface.

La *géodésie* peut d'ailleurs se subdiviser en trois branches principales correspondant à des études de plus en plus élevées :

1° La *géodésie élémentaire* qui, partant de l'hypothèse de la terre sphérique, applique à ses résultats des termes correctifs pour le passage à l'ellipsoïde, et qui comprend tout ce qu'exigent les observations et les calculs relatifs aux

triangulations exécutées en vue des opérations topographiques ;

2° La *géodésie sphéroïdique*, reposant, comme son nom l'indique, sur la considération du sphéroïde et qui comprend tout ce qui concerne les triangulations primordiales ;

3° La *géodésie supérieure*, consacrée à l'étude de l'exacte figure de la terre.

A chacune d'elles correspond un volume spécial. En raison du rôle capital qu'en ces matières joue la théorie des erreurs, celle-ci, dont les éléments sont exposés dans le premier de ces trois volumes, reçoit, dans le second, tout le développement susceptible d'intéresser les géodésiens.

La détermination des positions absolues sur la terre ferme, que réclame la géodésie, fait l'objet de l'*astronomie géodésique* que, en raison de leur étroite affinité, on ne saurait séparer de la *navigation;* l'une et l'autre de ces sciences d'application reposent d'ailleurs, en réalité, sur des opérations purement géométriques auxquelles l'astronomie ne fournit que des points de repère.

Il a paru également à propos de rapprocher de la géodésie et de la topographie (dont la *métrophotographie* n'est qu'une branche spéciale) diverses sciences connexes comme la *métrologie* qui détermine les étalons de mesure utilisés par la géodésie, la *cartographie* qui a pour objet la représentation des résultats fournis par la topographie...

Quant à la représentation des objets de petites dimensions, elle résulte de la mise en œuvre de divers systèmes de projection, au premier rang desquels ceux des projections orthogonales (*géométrie descriptive*) et des projections centrales (*perspective*).

Grâce à la *métrophotographie*, les lois de la perspective sont, en outre, très heureusement utilisées et le seront de jour en jour davantage en vue des levers topographiques.

Les volumes seront publiés dans le format in-18 jésus cartonné ; ils formeront chacun 400 pages environ avec ou sans figures dans le texte. Le prix marqué de chacun d'eux, quel que soit le nombre de pages, est fixé à 5 francs. Chaque volume se vendra séparément.

Voir, à la fin du volume, la notice sur l'ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE, pour les conditions générales de publication.

TABLE DES VOLUMES
ET LISTE DES COLLABORATEURS

*Les volumes parus sont indiqués par un *.*

A. — Science du calcul.

1. — **Calcul numérique**, par R. de Montessus et R. d'Adhémar, docteurs ès sciences mathématiques.

* 2. — **Calcul graphique et Nomographie**, par M. d'Ocagne, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'Ecole polytechnique.

3. — **Calcul mécanique.**

B. — Analyse appliquée.

* 1. — **Théorie et pratique des opérations financières**, par A. Barriol, ancien élève de l'Ecole polytechnique, membre de l'Institut des actuaires français, directeur de l'Institut des finances et assurances.

* 2. — **Théorie mathématique des assurances**, par P.-J. Richard et Em. Petit, anciens élèves de l'Ecole polytechnique, actuaires.

3. — **Économique rationnelle**, par A. Aupetit, docteur en droit, membre de l'Institut des actuaires français.

* 4. — **Statistique mathématique**, par H. Laurent, docteur ès sciences, membre de l'Institut des actuaires français, répétiteur à l'Ecole polytechnique.

C. — Géométrie appliquée.

1. — **Métrologie**, par R. Benoit, directeur du Bureau international des poids et mesures, correspondant de l'Institut et du Bureau des longitudes.

2. — **Astronomie géodésique**, par L. Driencourt, ingénieur hydrographe en chef de la Marine.

* 3. — **Navigation**, par E. Perret, lieutenant de vaisseau, professeur à l'École navale.

* 4. — **Géodésie élémentaire**, par R. Bourgeois, lieutenant-colonel d'artillerie, chef de la section de géodésie au service géographique de l'armée, membre correspondant du Bureau des longitudes.

5. — **Géodésie sphéroïdique**, par R. Bourgeois.
6. — **Géodésie supérieure**, par R. Bourgeois.
7. — **Topographie**, par R. Bourgeois.
8. — **Métrophotographie**, par J. Th. Saconney, capitaine du génie.
9. — **Cartographie**, par L. Jardinet, chef de bataillon du génie, chef adjoint de la section de cartographie au service géographique de l'armée.
10. — **Géométrie descriptive**, par R. Bricard, ingénieur des manufactures de l'Etat, répétiteur à l'École polytechnique.
11. — **Perspective.**

NOTA. — La collaboration des auteurs appartenant aux armées de terre et de mer, ou à certaines administrations de l'Etat, ne sera définitivement acquise que moyennant l'approbation émanant du ministère compétent.

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION

du Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

Secrétaire général : H. PIÉRON, Agrégé de l'Université,

BIBLIOTHÈQUE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Directeur : M. D'OCAGNE

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées
Répétiteur à l'École polytechnique.

NAVIGATION

ERRATA

Page 51. Ligne 13 du haut, au lieu de « η_1 et η_2 », il faut « η_1 et η ».

Page 191. Ligne 16 du haut, au lieu de « différencions », il faut « différentions ».

Page 260. Ligne 15 du haut, au lieu de « point z », il faut « point z' ».

Page 303. Fig. 50. Le point Z doit être au milieu de Ac.

Page 316. Ligne 7 du bas, au lieu de « coordonnées entre », il faut « coordonnées, en secondes d'arc, entre ».

NAVIGATION

INSTRUMENTS — OBSERVATIONS — CALCULS

PAR

E. Eugène Marie Adrien PERRET

LIEUTENANT DE VAISSEAU
PROFESSEUR A L'ÉCOLE NAVALE

Avec 57 figures dans le texte

PARIS

OCTAVE DOIN, ÉDITEUR

8, PLACE DE L'ODÉON, 8

—

1908

Tous droits réservés.

INTRODUCTION

I. — Problèmes de la navigation.

La science de la navigation a pour objet principal la solution des deux problèmes suivants :

1° Déterminer la route à suivre pour se rendre d'un lieu à un autre.

2° *Faire le point*, c'est-à-dire déterminer la position du navire sur la surface des mers.

Ces deux problèmes sont résolus par les méthodes de la *Navigation par l'estime*, qui utilise le *compas de route*, instrument de direction, et le *loch*, instrument de vitesse.

Mais, en ce qui concerne le second problème, la précision du *point* décroît avec la distance parcourue, à cause de l'imperfection des mesures et de l'accumulation des erreurs. Aussi est-il nécessaire, lorsqu'on s'éloigne des côtes, d'avoir bientôt recours à d'autres méthodes pour faire le *point :* ces méthodes constituent la *Navigation astronomique*, qui utilise le *sextant* et le *chronomètre*. Le *point* se déduit de l'observation des astres ; la précision de la position obtenue dépend de la précision propre à chacun des instruments employés, mais du moins les erreurs de la veille n'ont aucune influence sur celles du lendemain. Bien que ce ne soit pas nécessaire à la solution du problème du point,

on se sert, dans les méthodes astronomiques actuelles, de la position fournie en première approximation par l'estime. L'un des instruments de l'estime, le compas, est du reste fondamental en navigation, puisque l'on ne sait pas se dispenser de son emploi pour maintenir le navire à une route déterminée. On doit aussi, comme nous le verrons, considérer la *carte marine* comme un instrument de première nécessité.

Certains documents sont, en outre, indispensables au navigateur. La *Connaissance des Temps*, publication annuelle faite par les soins du Bureau des Longitudes, fournit les positions des astres nécessaires à l'application des méthodes astronomiques ; l'*Annuaire des marées*, publié par le Service hydrographique de la Marine, permet de déterminer la profondeur réelle de la mer à un instant donné, renseignement évidemment très important pour la navigation côtière, la carte donnant simplement les sondes par rapport au niveau des plus basses mers. Enfin diverses autres publications du Service hydrographique, *le Livre des phares*, *les Instructions nautiques*, etc., rendent les plus grands services à la navigation.

Il n'entre pas dans notre cadre d'exposer la théorie des marées ; les calculs pratiques que nous pourrions indiquer feraient, pour la plupart, double emploi avec les explications de l'*Annuaire des marées*.

Les fers et aciers qui composent la majeure partie des matériaux employés à la construction des navires modernes apportent aux indications des compas des troubles parfois très considérables, toujours très gênants, et variables avec le cap et la position géographique. La compensation des forces perturbatrices s'obtient en opposant à chacune d'elles une force égale et de même nature ; on détermine ensuite les déviations résiduelles par une opération appelée *régulation*. Le *Manuel des Instruments nautiques* de M. le capitaine de frégate en retraite Guyou, membre de l'Institut, ren-

ferme l'exposé théorique et pratique de la compensation et de la régulation des compas ; cet ouvrage, publié par le Service hydrographique, doit se trouver entre les mains de tous les navigateurs.

Nous exposerons, dans ce qui suit, le mode d'emploi des instruments et les méthodes modernes pour la résolution des deux problèmes principaux de la navigation, définis ci-dessus.

II. — Conventions et notations.

L. . . . . Latitude astronomique, comptée de 0° à ± 90°, positivement ou négativement, selon que le lieu considéré appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud.

L'. . . . . Latitude géocentrique, inclinaison du rayon de la Terre sur l'équateur. Cette coordonnée est comptée de la même manière que L.

G . . . . . Longitude géographique, comptée de 0° à ± 180°, ou de 0^h à ± 12^h, à partir du méridien de Paris, positivement vers l'Ouest, négativement vers l'Est.

δ ou δ_a . . . Déclinaison d'un astre, comptée de 0° à ± 90°, positivement ou négativement, selon que l'astre appartient à l'hémisphère nord ou à l'hémisphère sud.

A ou A_a . . . Ascension droite d'un astre, comptée de 0^h à 24^h à partir du point vernal, dans le sens direct.

A_v ou A_m. . . Ascension droite du soleil vrai ou du soleil moyen.

Tag	Angle horaire de l'astre A pour le méridien de longitude G. Cet angle est compté de 0^h à 24^h à partir du méridien supérieur dans le sens rétrograde.
t.	Autre notation plus simple que Tag, pour représenter l'angle horaire dans les équations trigonométriques.
Tap	Angle horaire rapporté au méridien de Paris.
Tmg, Tmp. . .	Angles horaires du *soleil moyen*, pour le lieu G et pour Paris.
Tvg, Tvp. . . .	Angles horaires du *soleil vrai*, pour le lieu G et pour Paris.
E_v.	Équation du temps vrai. Différence $(AR_v - AR_m)$.
E_m.	Équation du temps moyen. Différence $(AR_m - AR_v)$.
Tsg	Temps sidéral du lieu de longitude G.
Tsp	Temps sidéral de Paris.
$\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_b$.	État absolu du chronomètre A, ou du chronomètre B.
m_a, m_b.	Marche diurne du chronomètre A, ou du chronomètre B.

III. — Données et formules relatives à l'ellipsoïde terrestre.

a, rayon équatorial CK ;
b, rayon polaire CP ;
ε, excentricité du méridien :

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}.$$

D'après l'Annuaire du Bureau des Longitudes de 1906 (Faye) on a :

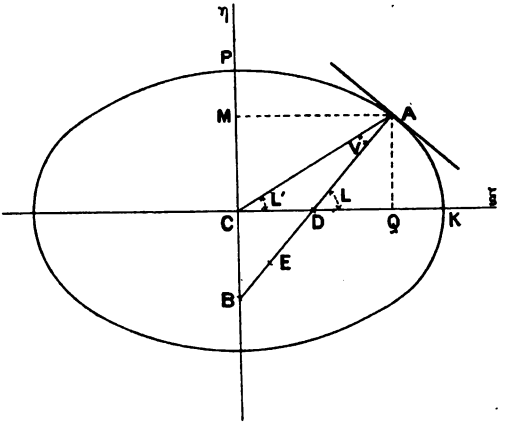
$$\begin{cases} a = 6\,378\,393^{m} \pm 79^{m} \\ b = 6\,356\,549^{m} \pm 109^{m}. \end{cases}$$

On en déduit : $\varepsilon^2 = 0{,}0068376$.

Relation entre la latitude astronomique L et la latitude géocentrique L' :

$$\operatorname{tg} L' = (1 - \varepsilon^2) \operatorname{tg} L.$$

V, angle à la verticale, formé au point A par le rayon de la



Terre et la verticale, et considéré comme la correction à apporter à L' pour avoir L :

$$L = L' + V,$$

$$\operatorname{tg} V = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin 2L \, (1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-1},$$

aux termes en ε^4 près :

$$V = \frac{1}{2 \text{ arc } 1''} \cdot \varepsilon^2 \sin 2L.$$

N, grande normale AB :

$$N = a(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{1}{2}}.$$

R, rayon de courbure AE du méridien :

$$R = a(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{a^2}(1 - \varepsilon^2).$$

r, rayon AC de la terre :

$$r = N(1 + \varepsilon^4 \sin^2 L - 2\varepsilon^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}.$$

Aux termes en ε^4 près :

$$r = a\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 L\right).$$

ξ, rayon AM du parallèle de latitude L :

$$\xi = N \cos L.$$

η, ordonnée AQ du point de latitude L :

$$\eta = (1 - \varepsilon^2) N \sin L.$$

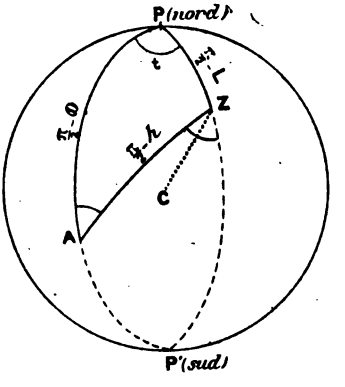
IV. — Définitions. Formules de l'astronomie sphérique employées en navigation.

Considérons l'image A d'un astre sur la sphère céleste géocentrique C, et soit P le pôle nord.

Nous appellerons *image du zénith* d'un lieu de la surface terrestre, ou plus brièvement, *zénith* le point Z obtenu sur

la sphère céleste en menant la parallèle CZ à la verticale *ascendante* du lieu.

Le méridien du lieu détache sur la sphère le grand cercle PZP′ ; en menant le cercle horaire PAP′ et le vertical vrai ou géocentrique ZA de l'astre, on forme deux triangles sphériques PAZ et P′AZ.



Le triangle PZA qui s'appuie sur le pôle nord P se nomme le *triangle de position* relatif au lieu et à l'astre considérés.

On appelle *hauteur vraie, h,* de l'astre l'arc du vertical ZA qui s'étend entre le point A et le grand cercle perpendiculaire à CZ (horizon vrai) ; on donne à *h* le signe + ou le signe — selon que Z et A sont ou non du même côté de l'horizon vrai. Il suit de là que la valeur, toujours positive du côté ZA (distance zénithale), est donnée par la formule algébrique $\left(\frac{\pi}{2} - h\right)$.

Pour les observations circumméridiennes nous désignerons la distance zénithale par la notation *n;* en ce cas il faudra considérer *n,* conformément aux conventions de l'Astronomie relatives aux passages méridiens, comme une quantité algébrique affectée du *signe* + ou du *signe* — selon que le passage doit s'effectuer au *sud* ou au *nord* du zénith.

L'*angle parallactique,* A, est formé au point A par le cercle horaire et le vertical AZ ; nous le compterons positivement,

de o à 2π, *dans le sens rétrograde,* à partir de la *direction nord* du cercle horaire,

On appelle *azimut vrai,* Z, de l'astre l'angle sphérique formé au point Z par le méridien et le vertical vrai ZA. Nous compterons cet angle positivement, de o à 2π, *dans le sens rétrograde,* à partir de la *direction sud* du méridien.

L'*azimut apparent* se définit de la même manière, en considérant l'analogue du triangle PZA sur la sphère céleste locale, A représentant alors le point où la direction dans laquelle apparaît l'astre perce la sphère céleste. Comme la réfraction déplace l'image de l'astre dans son vertical et qu'il en est à fort peu près de même de l'effet de la parallaxe, les azimuts vrai et apparent sont sensiblement égaux à chaque instant, et, en navigation, nous n'aurons jamais à tenir compte de la différence.

Ces définitions rappelées, on voit que les côtés du triangle de position ont les valeurs suivantes :

$$\mathrm{PZ} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{L},$$

$$\mathrm{PA} = \frac{\pi}{2} - \mathfrak{D},$$

$$\mathrm{ZA} = \frac{\pi}{2} - h,$$

à condition de compter L et $\mathfrak{D}$ comme il a été dit au n° II.

En appliquant les formules de la trigonométrie sphérique au triangle PZA, et en introduisant les quantités ci-dessus définies, on obtient les formules suivantes entièrement générales :

$$\begin{cases} \sin h = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t \\ \sin \mathfrak{D} = \sin h \sin \mathrm{L} - \cos h \cos \mathrm{L} \cos \mathrm{Z}, \end{cases}$$

$$\frac{\sin \mathrm{Z}}{\cos \mathfrak{D}} = \frac{\sin t}{\cos h} = \frac{\sin \mathrm{A}}{\cos \mathrm{L}}.$$

$$\begin{cases} -\cos h \cos Z = \sin \mathfrak{D} \cos L - \cos \mathfrak{D} \sin L \cos t \\ \cos h \cos A = \sin L \cos \mathfrak{D} - \cos L \sin \mathfrak{D} \cos t. \end{cases}$$

$$\operatorname{cotg} Z \sin t = \sin L \cos t - \operatorname{tg} \mathfrak{D} \cos L.$$

Les angles t, Z, A sont inférieurs ou supérieurs à π en même temps.

Rappelons enfin la formule des passages méridiens :

$$L = n + \mathfrak{D}.$$

n se compte comme il a été dit plus haut ; pour les passages inférieurs seulement on doit remplacer dans cette formule $\mathfrak{D}$ par $(\pm\pi - \mathfrak{D})$, en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que l'observation est faite dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud.

NAVIGATION

LIVRE I

NAVIGATION PAR L'ESTIME

CHAPITRE I

INSTRUMENTS DE L'ESTIME

CORRECTION DES ROUTES. LOXODROMIE

Compas.

1. **Description sommaire.** — Les boussoles employées en navigation portent le nom de *compas*. Elles servent à assurer la direction de la route et à mesurer les relèvements dont nous parlerons bientôt.

2. Le compas comprend essentiellement une *rose* mobile dans une cuvette, fermée par une glace destinée à préserver la rose des agitations de l'air. La cuvette est suspendue à la Cardan à la partie supérieure d'un fût, généralement cylindrique, qui lui sert de support et se nomme *habitacle*.

3. La rose se compose d'une charpente comprenant une jante circulaire en aluminium, réunie par des rayons en cordonnets de soie à un petit disque central en aluminium qui repose sur la chape. La charpente est recouverte d'une feuille de papier portant une gra-

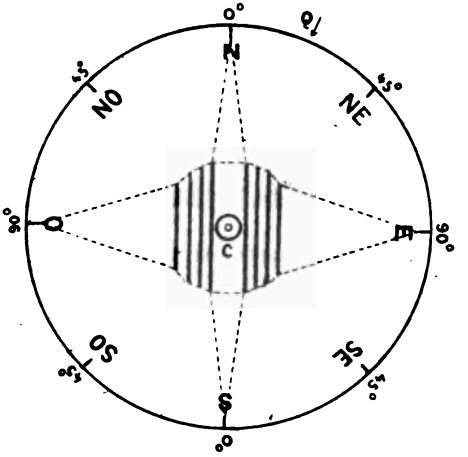


Fig. 1.

duation à sa circonférence : quatre quadrants dont les origines portent les initiales N, S, et les extrémités les initiales E, O, des points cardinaux; chaque quadrant est divisé en 90 degrés, numérotés de 10 en 10, à partir des points N. et S. dans les deux sens vers les points E. et O.

Enfin, la rose est complétée par un équipage de petites aiguilles aimantées, parallèles entre elles et à la ligne NS de la graduation.

Cet équipage forme un plateau octogonal (il y a 8 aiguilles dans le modèle ordinaire, mais 4 seulement dans le petit modèle), suspendu directement à la jante au moyen de huit pattes d'oie en fils de soie qui le rendent solidaire de celle-ci dans le sens horizontal; le parallélisme des aiguilles entre elles est en outre assuré par un cordonnet de soie collé à la gomme laque aux extrémités des aiguilles qu'il traverse.

La chape de la rose est en saphir; elle repose sur un pivot, à pointe en osmiure d'iridium, porté par le fond de la cuvette.

Le poids total de la rose est de quelques grammes seulement (14 gr. pour la rose de $0^m,25$ de diamètre et 4 gr. pour celle de $0^m,152$).

Les anciennes roses étaient moins délicates que la rose du système Thomson que nous venons de décrire; mais elles ne réunissaient pas, comme celle-ci, les importantes qualités (notamment celles de sensibilité, de stabilité mécanique et magnétique, et de facilité de compensation) qui l'ont fait universellement adopter.

4. **Définitions. Angle de route.** — On appelle *angle de route vrai,* ou simplement *route vraie* R_v, l'angle formé par la direction de la route du navire avec le méridien.

Cet angle devrait être compté, comme les azimuts, à partir d'une origine unique et dans un seul sens. Cependant, comme il se rapporte immédiatement aux indications du compas, il convient de le compter toujours inférieur à 90°, de l'un ou l'autre pôle, vers l'est ou vers l'ouest. On évite ainsi des transformations; mais, pour que l'angle de route soit déterminé, il est

nécessaire de l'exprimer en indiquant, en outre de sa valeur en degrés, son origine et son sens. C'est ainsi que l'on écrit $R_v = N.37°O.^t$, ce qui veut dire que la direction de la route fait avec la partie nord du méridien un angle de 37° vers l'ouest.

Cette manière de compter les angles de route a le désavantage de compliquer les règles de correction des routes et relèvements; il vaudrait mieux les compter comme les azimuts, ce qui n'aurait aucun inconvénient si la rose du compas était graduée de o à 360° à partir du nord, ou mieux du sud, qui est l'origine généralement adoptée par les astronomes. On ne s'explique guère la raison pour laquelle la marine française conserve l'ancien mode de graduation des roses.

5. **Route ou cap au compas.** — La *ligne de foi* est un repère vertical Q tracé sur la paroi avant de la cuvette, de telle manière que le plan CQ soit parallèle au plan longitudinal du navire. Il s'ensuit qu'en lisant la graduation placée en regard de la ligne de foi, on a immédiatement l'angle formé par la quille du navire avec la direction de l'aiguille aimantée : cet angle se nomme la *route au compas* ou le *cap au compas* R_c; il se compte tel qu'on le lit, c'est-à-dire du nord ou du sud du compas, vers l'est ou vers l'ouest, de o à 90°.

La route au compas s'écrit de la même manière qu'une route vraie, en complétant la valeur numérique par l'indication de l'origine et du sens de l'angle; exemple : $R_c = S.\ 48°E.$

6. **Relèvement.** — Le *relèvement* d'un point extérieur au navire est l'azimut de ce point, mais compté comme un angle de route, c'est-à-dire inférieur à 90°,

du N. ou du S. vers l'E. ou vers l'O. Selon que l'origine de l'angle est un point cardinal géographique ou l'un des pôles du compas, le relèvement est dit *vrai* Z_v, ou au *compas* Z_c.

Le relèvement au compas d'un point s'obtient par la visée au moyen d'une *alidade* ou *pinnule* pivotant au centre de la glace recouvrant la cuvette.

7. **Déclinaison magnétique.** — On sait qu'une aiguille aimantée, mobile dans un plan horizontal et soumise uniquement à l'action du champ terrestre, prend une position d'équilibre généralement différente du méridien. Le méridien magnétique est le plan vertical passant par les pôles de l'aiguille en équilibre.

Soit sur une circonférence de centre C, une direction CV parallèle à la méridienne géographique et dirigée vers le nord. Menons CM parallèle à la trace du méridien magnétique et dirigée vers le nord. La *déclinaison magnétique* D_m est l'angle VCM du méridien magnétique avec le méridien géographique; elle est N.E. ou positive quand le nord magnétique M tombe à droite du nord vrai V; elle est N.O. ou négative dans le cas contraire.

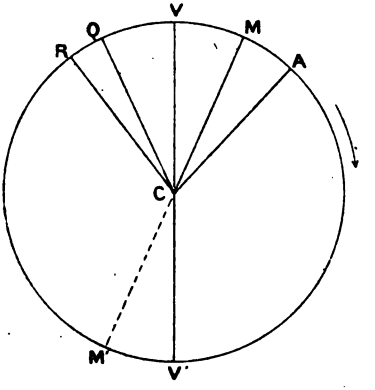


Fig. 2.

8. **Déviation.** — A bord d'un navire, le nord du compas est généralement dévié du méridien magnétique sous l'action du champ dû à l'induction des fers et aux aimants du bâtiment, et cet écart est variable avec le cap.

En représentant par CA la direction du nord de la rose, on appelle *déviation*, δ, l'angle MCA de CA avec le méridien magnétique. La déviation est N.E. ou positive quand le nord A du compas tombe à droite du nord magnétique M; elle est NO ou négative dans le cas contraire.

9. **Cap vrai. Dérive.** — Soit maintenant CQ la direction de la quille du navire, dans le sens de l'arrière à l'avant. Le *cap vrai* du navire est l'angle formé par le méridien avec la direction précédente; il se compte inférieur à 90°, à partir du nord ou du sud, comme un angle de route. Sur la figure, c'est l'angle VCQ, compté du nord vrai V.

Abstraction faite du courant, la direction de la trajectoire du navire ne coïncide pas toujours avec CQ. Si le vent souffle fortement d'un bord, le navire est rejeté sous le vent, et la direction CR de la route fait avec CQ un petit angle nommé *dérive, d*, qui est ainsi la différence entre la route vraie et le cap vrai. La dérive, comptée du point Q, est dite tribord ou positive lorsque R tombe à droite de Q; elle est bâbord ou négative dans le cas contraire.

Elle se mesure à l'aide d'un demi-cercle, placé sur le couronnement du navire, et qui permet d'estimer l'angle que fait la quille avec le sillage ou ligne de remous que le bâtiment laisse derrière lui sur la mer.

La dérive est généralement insensible sur les navires à vapeur, sauf par coup de vent.

10. **Variation.** — L'écart VCA du nord vrai et du nord de la rose se nomme *variation* et se désigne par W.

La variation se compte à partir de V; elle est N.E. ou positive quand A est à droite de V, N.O. ou négative dans le cas contraire.

11. **Correction des routes.** — La déclinaison D_m est donnée par les cartes ou par les instructions nautiques; elle manque assez souvent de précision. La déviation δ est nulle ou négligeable (compas compensé), ou se déduit d'un tableau, dressé par l'observation, qui la fait connaître en fonction de R_c. On peut aussi, comme nous le verrons, déterminer W par une observation directe. Enfin d se mesure comme il a été dit plus haut.

Nous allons nous proposer tout d'abord de déterminer R_v, connaissant R_c, D_m, δ et d.

A cet effet, considérons sur la circonférence de la figure précédente les arcs correspondants aux angles qui viennent d'être définis.

Prenons comme sens de la base[1] le sens rétrograde indiqué par la flèche.

Soit A le pôle du compas se rapportant à la définition de R_c (n° 5), c'est-à-dire tel que l'arc AQ soit inférieur à 90°. Les points V et M représentaient respectivement le nord vrai et le nord magnétique; ils désigneront dorénavant les pôles du même nom que A.

[1] Guyou, 3, nos 11 et suivants.

Convenons de donner aux angles de route N.E. et S.O. le signe +, et à ceux comptés N.O. et S.E. le signe —. Par cette convention, les arcs comptés dans le sens de la base sont positifs, et ceux comptés en sens contraire sont négatifs.

Les définitions de D_m, δ, d et W s'accordent avec cette convention. En effet, si le point M par exemple est à droite de V quand ces points sont des points *Sud*, le nord magnétique M' tombe évidemment aussi à droite du nord vrai V', et D_m qui est N.E. ou positive est égale à + VM, soit à $\widehat{VM}$ en grandeur et en signe. Les valeurs algébriques de D_m, δ et W sont donc, respectivement, $\widehat{VM}$, $\widehat{MA}$ et $\widehat{VA}$, quel que soit le nom du point A.

Cela posé, considérons les 5 points V, M, A, Q, R rangés sur la circonférence dans un ordre quelconque, et imaginons un mobile partant du point V pour aller au point R en parcourant les divers arcs dans l'ordre des lettres.

On sait que l'on peut écrire algébriquement, c'est-à-dire en donnant le signe + ou le signe — aux arcs selon qu'ils sont parcourus dans le sens de la base ou en sens inverse :

$$\widehat{VR} = \widehat{VM} + \widehat{MA} + \widehat{AQ} + \widehat{QR}.$$

Ce qui peut s'écrire, avec les notations adoptées :

$$(1) \qquad R_v = R_c + D_m + \delta + d.$$

La route vraie ainsi obtenue est comptée de V, c'est-à-dire du pôle de même nom que A, qui est l'origine de R_c. Pour exprimer R_v conformément à sa définition, il faudra donc lui donner le nom de cette origine,

puis le nom E. ou O., de manière à ce que le signe qui lui est ainsi attribué soit celui donné par le calcul; enfin si la valeur absolue trouvée est supérieure à 90°, il restera encore à en prendre le supplément et à changer le nom de l'origine.

Exemple. Soit :

$R_c = S.79°E.$; $D_m = 24°N.O.$; $\delta = 5°N.E.$; $d = 2°T$

On a d'abord :

$R_c = -79°$, $D_m = -24°$, $\delta = +5°$, $d = +2°$,

et la formule (1) donne :

$$R_v = -79 - 24 + 5 + 2 = -96°.$$

R_v est comptée du sud comme R_c, et pour qu'elle soit négative il nous faut écrire S.96°E. ; pour la compter inférieure à 90°, nous prendrons le supplément de 96° et nous changerons l'origine, ce qui nous donnera :

$$R_v = N.84°E.$$

12. Considérons maintenant les 3 points V, M, A, et faisons marcher le mobile de V en A, en suivant l'ordre des lettres. Nous aurons :

$$\widehat{VA} = \widehat{VM} + \widehat{MA},$$

c'est-à-dire :

(2) $$W = D_m + \delta.$$

Ainsi la variation est la somme algébrique de la déclinaison et de la déviation.

En remplaçant dans (1), nous avons :

(3) $$R_v = R_c + W + d.$$

Si $d = 0$, on a $R_v = R_c + W$; la route vraie et le cap vrai du navire sont alors identiques (abstraction faite de la dérive due au courant).

13. **Correction des relèvements.** — Pour appliquer les principes précédents aux relèvements, il suffit de supposer que CR est la trace du vertical de l'objet relevé. On a alors, par définition :

$$Z_v = \widehat{VR}, \quad Z_c = \widehat{AR},$$

et si nous déplaçons le mobile de V en R de manière à ce qu'il rencontre les 4 points V, M, A, R, dans l'ordre des lettres, on a :

$$\widehat{VR} = \widehat{VM} + \widehat{MA} + \widehat{AR}.$$

Ce qui donne, en transposant :

$$(4) \qquad Z_v = Z_c + D_m + \delta$$

ou, à cause de l'équation (2) :

$$(5) \qquad Z_v = Z_c + W.$$

Connaissant D_m et δ, ou W, les équations (4) et (5) permettent de passer de Z_c à Z_v ou inversement. Les observations relatives à la transformation du résultat du calcul sont les mêmes que celles faites au n° 11.

Exemple. Soit :

$$Z_c = \text{N.85°O.} \quad \text{et} \quad W = 17°\text{N.O.}$$

On a $Z_c = -85$, $W = -17$, et la formule (5) donne :

$$Z_v = -85° - 17° = -102° = \text{N.102°O.} = \text{S. 78°O.}$$

14. **Altération des routes.** — On a souvent besoin de calculer R_c, afin de savoir à quel cap au compas amener le navire pour qu'il suive la route vraie

donnée R_v. Il suffit de résoudre par rapport à R_c les formules générales (1) et (3), et l'on a :

$$(6) \qquad \begin{cases} R_c = R_v - D_m - \delta - d. \\ R_c = R_v - W - d. \end{cases}$$

La dérive d est ici une valeur supposée pour l'allure, si l'on doit faire route à la voile. Autrement on prendra $d = 0$. D'ailleurs R_c étant calculée dans l'hypothèse de $d = 0$, on met en route à ce cap et l'observation fait connaître d, dont on tient compte ensuite pour rectifier R_c de manière à satisfaire aux équations (6).

Le résultat du calcul des formules (6) est évidemment rapporté au même pôle que R_v, et l'on ramène R_c, s'il y a lieu, à une valeur inférieure à 90° par la même règle que plus haut.

15. **Réglage du compas.** — Nous laissons ici de côté la détermination systématique des déviations qui constitue la *Régulation du compas*. Nous allons montrer seulement comment le navigateur peut, en haute mer, contrôler les indications du compas en déterminant la variation par l'observation des astres.

Pour la commodité et la précision de l'opération, il convient de choisir un astre peu élevé sur l'horizon (moins de 30° de hauteur) ; on le relève au compas, ce qui donne Z_c. On détermine ensuite l'azimut Z de l'astre, ce qui en fait connaître le relèvement vrai Z_v, et la variation s'obtient par la formule (5) en écrivant :

$$W = Z_v - Z_c,$$

en ayant soin de ramener Z_c au pôle de Z_v ou inversement, avant d'appliquer la formule.

Pour déterminer Z, on peut employer deux procédés généraux.

16. 1° **Par la hauteur.** — Immédiatement avant ou après l'observation de Z_c, on prend au sextant la hauteur de l'astre. De l'heure approchée de l'observation, on conclut la déclinaison $\mathfrak{D}$ de l'astre, puis on calcule Z par la formule

$$\sin \mathfrak{D} = \sin L \sin h - \cos L \cos h \cos Z$$

résolue par rapport à cos Z ou mise sous une forme directement calculable par logarithmes, si l'on ne dispose pas de tables de logarithmes de Gauss.

La latitude employée est celle que fournit l'estime, par les méthodes du chapitre III.

Ce procédé n'est pour ainsi dire pas employé, le suivant étant beaucoup plus commode; cependant on peut en tirer parti très simplement, dans un cas particulier qui dispense de l'observation de la hauteur. C'est lorsqu'il s'agit du lever ou du coucher vrais de l'astre. On a alors $h = 0$, et la formule précédente donne :

$$\cos Z_\omega = - \sin \mathfrak{D} \text{ séc } L.$$

Cette formule a été mise en tables (T. IX de Guyou, T. XXXVII de Caillet, T. XXIV de Friocourt). On peut aussi la représenter nomographiquement.

Le lever et le coucher vrais du centre du soleil ont lieu, pour un observateur élevé de 5 à 6 mètres au-dessus de la mer, lorsque la hauteur apparente observée du bord inférieur de l'astre est environ les $\frac{2}{3}$ de son diamètre vertical. Pour la lune, le lever et le cou-

cher vrais du centre ont lieu à peu près en même temps que le lever et le coucher apparents du bord supérieur; toutefois ceci suppose la lune à sa distance moyenne et l'observateur élevé de 12 mètres environ (n° 171).

Mais pour une même erreur sur la hauteur, l'erreur de l'azimut conclu est proportionnelle à tg L coséc Z_ω lorsque l'astre est à l'horizon; ce procédé approximatif devient donc peu précis par les hautes latitudes lorsque l'astre se lève ou se couche assez loin des points est ou ouest.

17. 2° **Par l'heure.** — En observant Z_c on note l'heure à la montre d'habitacle, ou mieux à une montre de poche que l'on compare ensuite au chronomètre. Cette heure peut être arrondie à la minute la plus voisine, mais il importe qu'elle soit exacte à une demi-minute près environ. Par suite, si l'instant de l'observation a été noté à la montre d'habitacle, il faut avoir soin de tenir compte du changement en longitude effectué depuis le réglage de cette montre : ce changement en longitude doit être retranché si l'on a fait route dans l'ouest, ajouté dans le cas contraire.

L'heure prise à la montre d'habitacle et corrigée comme nous venons de le dire donne l'heure vraie du lieu. Si l'heure a été prise à une montre comparée ensuite au chronomètre, on a l'heure moyenne de Paris.

Dans les deux cas, on obtient l'angle horaire local t de l'astre par une conversion de temps (n^{os} 112 et 109). Si l'astre observé est le soleil, son angle horaire se déduit immédiatement de l'heure de la montre d'habitacle, ce qui est une simplification.

On fait ensuite un calcul d'azimut au moyen de la latitude estimée L, de la déclinaison (D) et de l'angle horaire t en employant la formule connue

$$(7) \qquad \text{cotg Z} \sin t = \sin \text{L} \cos t - \text{tg (D)} \cos \text{L}.$$

Cette formule fait connaître cotg Z; elle détermine Z sans ambiguïté, puisque Z et t sont à la fois inférieurs ou supérieurs à π.

Si l'on calcule la formule (7) par logarithmes, 3 décimales suffisent.

Ce procédé de réglage du compas étant le plus pratique, on s'est efforcé de simplifier le calcul de la formule. Des tables numériques ont été dressées dans ce but par Labrosse, l'amiral Perrin[1], le lieutenant de vaisseau Decante, etc. Nous avons nous-même construit pour cet objet un nomogramme à points alignés[2].

Remarque. — Dans le cas de l'observation de l'étoile polaire (α Petite Ourse), on peut employer la formule simplifiée $Z = 180° - \delta \sin t \,\text{séc}\, L$ (voir n° 227). On trouve dans la *Connaissance des Temps* une table des azimuts de cette étoile donnant Z compté du nord.

18. **Exemple numérique d'un calcul de variation.** — Par $L = 65°,12'N.$, $G = 30°,15'E.$ on a relevé au compas α Petit Chien (0,5) et on a trouvé $Z_c = S.88°,5E.$ à l'instant $Tmp = 12^h.13^m$ le 3 octobre 1906. Calculer Z et en déduire W.

[1] Perrin, 1.
[2] Perret, 1.

CALCUL DE t (voir n° 109).

α Petit Chien (C. des T.)	$\AA = 7^h.34^m,4$ $\mathcal{D} = +5°.28'$
$Tmp =$	$12^h.13^m$ le 3 octobre
$\AA m_0 =$	12 .45 ,1
$\delta \AA m_0 =$	+ 2 ,0
$Tsp =$	1 . 0 ,1
$-\AA =$	− 7 .34 ,4
$T\alpha p =$	$17^h.25^m,7$
$T\alpha p =$	261°.26′
$-G =$	+30 .15
$T\alpha g = t =$	291°.41

CALCUL DE Z PAR LOGARITHMES.

$\text{Cotg}\, Z \sin t = \sin L \cos t - \text{tg}\, \mathcal{D} \cos L$

$L = +$	65°,2	sin	$\bar{1}$,958	cos $\bar{1}$,623
$\mathcal{D} = +$	5 ,5			tg $\bar{2}$,984
$t =$	291,7	cos	$\bar{1}$,568	
		a	$\bar{1}$,526	b $\bar{2}$,607
		b	$\bar{2}$,607	
		$\text{arg}^t \Delta$	0,919	
		$l \,.\, \Delta$	0,056	
		$\text{cotg}\, Z \sin t$	$\bar{1}$,470	
		$\sin t$	$\bar{1}$,968 n	
		$\text{cotg}\, Z$	$\bar{1}$,502 n	

$Z > 180°$ comme t

$Z = 287°,6$, d'où $Z_V = $ S. 72°,4 E.

CALCUL DE Z_V PAR LES TABLES DE L'AMIRAL PERRIN.

$p' = +0,10$
$p'' = -0,87$
$p = -0,77$
$Z_V =$ S. 72°,1 E.

CALCUL DE W.

$Z_V = -72°,4$
$-Z_C = +88,5$
$W = +16,1$
$W =$ 16° NE.

Loch.

19. Le *loch* est un instrument destiné à mesurer la vitesse et par suite la longueur du chemin parcouru par le navire.

20. **Unité de distance.** — L'unité adoptée est le *mille,* longueur de la minute d'arc de grand cercle de la Terre supposée sphérique et ayant pour rayon la moyenne $\frac{a+b}{2} = 6\,367\,471^{m}$ des rayons équatorial et polaire. On trouve ainsi que la longueur du mille est $1\,852^{m},2$; souvent aussi on désigne sous le nom de mille la longueur de la minute d'équateur qui, étant d'environ 1 855 mètres, diffère peu de la précédente.

On faisait autrefois usage de la lieue marine, qui valait 3 milles ou 5556 mètres.

21. **Loch ordinaire.** — Le loch est constitué par une planchette de bois nommée *bateau de loch,* reliée à une ligne d'environ 300 mètres de longueur.

Le bateau de loch a la forme d'un secteur circulaire ABC de 60° d'ouverture. Le côté courbe BC est

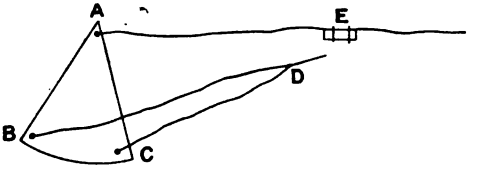


Fig. 3.

lesté de manière à ce que la planchette se tienne spontanément verticale lorsqu'elle est immergée.

La ligne de loch est fixée au sommet A du bateau ; elle porte un cylindre creux E, nommé fémelot, à une distance d'un mètre environ du point A. Deux bouts de ligne égaux, d'une longueur un peu supérieure à AE, partent des sommets B et C pour se réu-

nir à une cheville D, l'aiguillot, que l'on introduit à frottement dans le fémelot lorsqu'on veut mâter le loch.

La ligne est enroulée sur le tambour d'un petit treuil portatif. Lorsqu'après avoir mâté le loch on en jette le bateau à la mer, le plan de celui-ci se tient vertical et se présente perpendiculairement à la direction de la ligne, dès que la tension de celle-ci est sensible. La résistance offerte par l'eau au mouvement que tend à prendre le bateau est si considérable, que ce dernier reste à très peu près immobile lorsqu'on laisse la ligne se dérouler librement ; il constitue ainsi un point fixe sur la nappe liquide, et il suffit de mesurer la longueur de ligne filée pendant un intervalle de temps connu pour en conclure la vitesse du navire.

L'intervalle de temps est donné par un *sablier* ou *ampoulette* qui, en principe, a une durée d'écoulement de 30 secondes ; cependant on emploie aussi, lorsque la vitesse est grande, une ampoulette de 15 secondes seulement afin d'avoir une moindre longueur de ligne à rentrer.

Après avoir été mouillée et allongée au maximum, la ligne est graduée de la manière suivante. L'origine est la *houache*, morceau d'étamine fixé sur la ligne à une distance du bateau de loch au moins égale à la longueur du navire ; il en résulte que lorsqu'on commence la mesure, le bateau se trouve hors de l'influence des remous du sillage. A partir de la houache, les graduations sont indiquées par des petits bouts de ligne équidistants : le 1er porte un nœud, le 2^{e} deux nœuds, le n^{e}... n nœuds, de sorte que, même la nuit,

on peut reconnaître au toucher le nombre de divisions filées.

La longueur constante de chaque division s'appelle *nœud ;* le demi-nœud est marqué sur la ligne par une petite lanière de cuir.

22. La longueur du *nœud* est déterminée par cette condition que le nombre de nœuds filés en 30 secondes soit égal au nombre de milles parcourus, à la même vitesse, en une heure. Il faut donc que l'on ait :

$$\frac{1 \text{ nœud}}{1 \text{ mille}} = \frac{30^s}{3600^s} = \frac{1}{120}.$$

Par suite, le nœud est le $\frac{1}{120}$ du mille, c'est-à-dire $15^m,43$. Toutefois l'expérience a montré que, pour tenir compte du léger entraînement du bateau de loch, il fallait diminuer un peu ce nombre et adopter $14^m,62$.

Dans le langage courant, la vitesse du navire s'exprime en nœuds, sans ajouter d'autre indication ; lorsqu'on dit que la vitesse est de 10 nœuds, cela signifie qu'à la même allure on parcourt 10 milles à l'heure.

23. Pour effectuer une mesure de vitesse, on mâte le loch, puis on jette le bateau à la mer en laissant la ligne se dérouler librement. A l'instant du passage de la houache dans les mains de celui qui dirige la manœuvre, on retourne l'ampoulette ; la ligne est ensuite arrêtée brusquement dès que le sable s'est entièrement écoulé.

L'arrêt brusque de la ligne s'obtient à la main, à

l'aide de plusieurs hommes, ou en serrant le frein du treuil lorsque ce dernier, par exception, est installé à demeure.

Il ne reste plus qu'à apprécier à vue la distance de l'opérateur à la division la plus voisine, d'où l'on conclut aisément la vitesse en nœuds et dixièmes.

Le loch est jeté à des intervalles de temps égaux, généralement toutes les demi-heures. On admet que la vitesse demeure constante pendant chacun de ces intervalles.

S'il y a, entre deux manœuvres du loch, un changement d'allure ou même de route susceptible d'entraîner une variation de vitesse, il suffit d'en noter l'heure pour pouvoir calculer chacun des chemins parcourus dans ces conditions différentes ; mais s'il y a plusieurs changements, il est nécessaire de jeter le loch après chacun d'eux. Pour rentrer le loch, on commence par opérer sur la ligne une traction très vive, afin de démâter le loch en provoquant le dégagement de l'aiguillot. Le bateau se couche alors à plat sur l'eau, et il devient plus facile de haler la ligne à bord.

24. Quel que soit le soin que l'on prenne d'aider à la main le déroulement de la ligne, la tension de celle-ci croît avec la vitesse du navire ; il arrive même que la vitesse angulaire du tambour du treuil ne puisse que difficilement atteindre la valeur qui convient au déroulement. Par les grandes vitesses, l'entraînement du bateau de loch devient ainsi considérable, et le loch manque de précision ; de plus, la manœuvre est difficile et la ligne se rompt fréquemment.

En fait, le loch ordinaire est inutilisable à partir de 14 ou 15 nœuds ; on a essayé bien des appareils pour remplacer cet instrument, mais sans grand succès. Les lochs modernes appartiennent à deux catégories dont nous dirons quelques mots.

25. **Lochs de pression.** — Le principe de ces instruments est le suivant[1] : Imaginons un tube vertical, coudé à la partie inférieure et présentant son ouverture dans la direction de l'avant du navire. La pression de l'eau à l'orifice se compose de la pression hydrostatique correspondante à l'immersion et de la pression hydrodynamique due à la vitesse. La somme de ces pressions peut se déduire de la hauteur de la colonne de liquide (eau ou mercure) contenu dans le tube et lui faisant équilibre ; d'autre part, on peut connaître la pression hydrostatique par l'immersion de l'orifice ou mieux à l'aide des indications d'un autre tube, parallèle au premier, mais dont l'ouverture est dirigée par le travers. On évalue ainsi la pression hydrodynamique, et l'on peut en conclure la vitesse, qui en est fonction, en dressant une table expérimentale des valeurs de cette fonction.

Par beau temps, certains appareils basés sur ce principe peuvent donner de bons résultats ; mais par mauvais temps les pressions deviennent si variées et si intenses que, malgré tous les amortisseurs imaginés, les index sont agités de mouvements désordonnés : il est alors impossible de faire aucune mesure.

26. **Lochs remorqués.** — Une hélice ou un moulinet pouvant tourner autour de leur axe et fixés à

[1] Guyou, 4.

un appareil remorqué prennent un mouvement de rotation dont la vitesse est fonction de celle du navire; cette dernière peut donc se déduire des indications de l'instrument lorsque la fonction qui lie les deux vitesses a été déterminée expérimentalement.

Parmi les instruments basés sur ce principe, les uns portent un enregistreur de tours renfermé dans une boîte remorquée avec l'appareil lui-même; ils donnent ainsi non la vitesse, mais le chemin parcouru (loch Massey). D'autres (loch Walker et loch Garland) transmettent, par l'intermédiaire d'une corde, leur mouvement de rotation à l'aiguille d'un cadran placé à bord; d'autres enfin (loch Fleuriais, loch Baule) transmettent électriquement leurs indications.

L'opération du halage à bord après chaque mesure, toujours laborieuse, peut être évitée par l'emploi des lochs remorqués ; mais on s'expose, en les laissant à la traîne, à les perdre assez fréquemment.

Ces appareils donnent de bons résultats aux vitesses faibles et modérées, comme le loch ordinaire ; comme lui aussi ils commencent à fonctionner d'une manière défectueuse à partir de 14 ou 15 nœuds, et cela pour des raisons variant avec les modèles.

27. **Estime des grandes vitesses.** — Faute de loch satisfaisant, les navires rapides calculent le chemin parcouru d'après le nombre moyen de tours d'hélice donné à la minute, en faisant usage d'un coefficient *d'avance par tour* déterminé pendant des parcours sur une base de longueur connue.

Ce procédé manque de précision, car le coefficient, supposé constant, est en réalité très variable : il dépend

de la vitesse, de l'état de la mer, du vent, de l'immersion et de l'état de propreté de la carène. Il faudrait pouvoir mesurer à volonté la valeur actuelle du coefficient, et c'est ce que le Service hydrographique a cherché à obtenir en présentant le loch dit à *fil perdu*, mis en essais en 1897.

Ce loch, basé sur le principe du loch ordinaire, a été disposé de manière à éviter les inconvénients signalés au n° 24. A cet effet, la ligne est remplacée par une ficelle de peu de valeur qui est abandonnée avec le bateau de loch, après chaque mesure : l'opération du halage à bord est ainsi supprimée. Pour diminuer la tension de la ligne et permettre la vitesse de déroulement nécessaire, la ficelle est enroulée non plus sur un tambour, mais en simples pelotes de 100 mètres enfermées dans des boîtes servant de dévidoirs.

L'appareil est complété par un enregistreur, composé d'un cadran sur lequel tourne une aiguille à pointage, conduite par l'arbre de la machine. Lorsque l'extrémité de chaque pelote échappe du dévidoir, elle donne un contact sur le cadran ; on peut ainsi connaître le nombre de tours et fractions de tour d'hélice nécessaire pour filer une longueur déterminée de ligne, et en déduire l'avance par tour, c'est-à-dire le coefficient dont il est question plus haut.

Cette manière de mesurer le chemin parcouru est plus précise que celle qui consiste à mesurer directement la vitesse par l'observation du temps employé à franchir une certaine longueur ; l'allure de la machine est, en effet, toujours un peu variable, et si la mesure n'est pas faite à l'instant où cette allure, et par suite la

vitesse, a sa valeur moyenne, le chemin parcouru que l'on en déduira sera inexact.

Le loch à fil perdu a donné, lors d'une première série d'essais, des résultats assez satisfaisants aux vitesses de 18 à 21 nœuds. Il ne paraît cependant pas avoir été mis en service, à notre connaissance du moins.

28. **Journal de bord.** — Le *journal de bord* est un registre sur lequel on inscrit tous les renseignements et tous les événements intéressant la navigation. En particulier, on y consigne avec le plus grand soin la variation observée à chaque cap, la dérive, les diverses routes au compas et le nombre de milles parcourus correspondant à chacune de ces routes. On est ainsi en mesure de calculer à chaque instant les coordonnées du navire (*point estimé*) par des méthodes que nous exposerons plus tard.

Loxodromie.

29. On nomme *loxodromie* toute courbe de la surface terrestre rencontrant les méridiens sous un même angle. Lorsqu'à l'aide du compas on gouverne à un angle de route constant, la trajectoire du navire est donc une loxodromie.

Abstraction faite des variations du courant, la route suivie par un navire est toujours une loxodromie ou, plus généralement, une succession d'arcs loxodromiques.

3o. **Équations de la loxodromie sur la sphère.** — Nous supposerons la surface de la Terre rigoureusement sphérique, et nous prendrons le rayon de la sphère pour unité de longueur.

Considérons un arc AB de loxodromie parcouru par un navire se rendant du point A (L_1, G_1) au point B (L_2, G_2). P étant le pôle Nord, soient C et C′ deux points infiniment voisins sur l'arc AB.

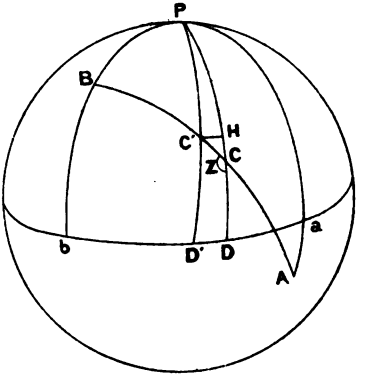


Fig. 4.

Traçons les méridiens PCD, PC′D′ prolongés en D et D′ jusqu'à l'équateur, et soit C′H un arc du parallèle de C′.

Désignons par Z l'azimut de la loxodromie, angle formé en C par la direction sud du méridien avec la direction CC′ de la route, et compté comme en astronomie, c'est-à-dire de o à 2π dans le sens rétrograde, à partir de la première direction.

Soit γ la longueur de l'arc aD décrit sur l'équateur par le pied du méridien du navire ; nous compterons cet arc à partir du pied a du méridien de départ, de o à $\pm\infty$, positivement dans le sens rétrograde, pour un observateur ayant les pieds au centre de la sphère et la tête vers le pôle nord.

Soit enfin μ la longueur de la route AC parcourue par le navire, comptée toujours positive.

Dans le triangle rectangle infinitésimal CC'H on a, L désignant la latitude de C :

$$C'H = CH \operatorname{tg} HCC'$$

ou, comme $C'H = DD' \cos L$:

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{Cos} L \, d\gamma = - \operatorname{tg} Z \, dL.$$

On a aussi : $CH = CC' \cos H\,CC'$,

d'où $$\text{(9)} \qquad dL = - \cos Z \, d\mu.$$

Il est facile de voir que ces deux équations différentielles (8) et (9), établies pour une disposition particulière de la figure, sont entièrement générales.

En intégrant le long de l'arc AB on a, en remarquant que Z est constant et en appelant g et m les valeurs que prennent respectivement γ et μ lorsque le navire C atteint le point B :

$$g = - \operatorname{tg} Z \int_{L_1}^{L_2} \text{séc}\, L dL = \operatorname{tg} Z \left[\mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2}\right) - \mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_2}{2}\right)\right],$$

$$L_2 - L_1 = - m \cos Z.$$

On a ainsi, pour déterminer Z, les deux équations de la loxodromie :

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Cotg} Z = \frac{\mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2}\right) - \mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_2}{2}\right)}{g}.$$

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{Cos} Z = \frac{L_1 - L_2}{m}.$$

L'équation (10) permet le calcul de cotg Z, et

l'équation (11) achève de déterminer Z en donnant le signe du cosinus.

Nous pouvons supposer que le navire franchit une première fois le méridien P*b* sans rencontrer le point B et ne l'atteint qu'à la révolution suivante, lorsque l'arc g s'est accrû de 2π, ou même de $2n\pi$. On conçoit ainsi qu'entre les points A et B il puisse y avoir plusieurs routes loxodromiques; en réalité, il y en a une infinité.

En effet, faisons d'abord marcher le méridien du navire dans le sens *du plus petit* des deux arcs *ab* qui s'étendent sur l'équateur du pied du méridien de A au pied du méridien de B. Nous aurons une première valeur de Z par les formules (10) et (11), en faisant g inférieur en valeur absolue à π, ce qui est toujours possible en exprimant convenablement la différence de longitude des points A et B. Continuons à faire tourner le méridien PCD dans le même sens, en donnant successivement à g les valeurs $(g+2\pi)$, $(g+4\pi)\ldots$, $(g+2n\pi)$, si g est positif, ou la suite des valeurs $(g-2\pi)$, $\ldots$ $(g-2n\pi)$, si g est négatif; nous trouvons alors, par l'équation (10), autant de valeurs différentes pour cotg Z, ce qui prouve qu'il y a une infinité d'arcs loxodromiques passant par A et B.

Mais, en valeur absolue, la cotangente et le cosinus, quel que soit Z, varient dans le même sens; par suite, quand g prend la série de valeurs absolues croissantes que nous lui donnons, comme le dénominateur croît seul dans le deuxième membre de (10), la cotangente diminue constamment en valeur absolue, et il en est de même de cos Z : le numérateur de ce dernier restant constant, il faut que m augmente, et par conséquent

le premier arc loxodromique envisagé est le plus court de tous ceux de cette série.

Si maintenant, comme arc initial, nous adoptons pour g l'autre valeur de l'arc ab, supérieure en valeur absolue à π, nous aurons, comme plus haut, une deuxième série d'arcs loxodromiques différents, dont la longueur croîtra constamment, pour les mêmes raisons.

Or d'une part ces deux séries sont évidemment les seules possibles, et d'autre part l'arc initial de la première est plus court que l'arc initial de la deuxième, puisque g est plus petit dans le 1er cas que dans le 2^e et qu'en valeur absolue à la plus grande cotangente correspond le plus grand cosinus et par suite le plus petit m.

Pour obtenir la plus courte de toutes les loxodromies passant par 2 points donnés, il faut donc donner à g la valeur algébrique de l'arc d'équateur ab inférieur à π en valeur absolue.

C'est évidemment cet arc que le navigateur a intérêt à suivre; c'est donc le seul que l'on doive envisager en navigation, et nous établirons en conséquence les formules de l'estime (n° 68).

Remarques. — 1° Nous avons supposé plus haut que les arcs initiaux des deux séries étaient inégaux. Ils deviennent égaux dans le cas particulier $g = \pm\pi$.

On peut alors se rendre de A en B en suivant le méridien et en franchissant l'un des pôles, ce qui donne deux routes différentes dont l'une est la plus courte possible. Ces routes ne sont pas comprises dans les formules (10) et (11), bien que le méridien soit une loxodromie. C'est qu'en effet, pour établir les for-

mules, nous avons supposé que la longitude du navire variait d'une manière continue tout le long de l'arc loxodromique, tandis que dans le cas présent, pour chacune des deux routes elle reste tout d'abord constante pour varier brusquement de π au moment du passage par un pôle : chacune des routes se compose en réalité non d'un arc unique, mais de deux arcs loxodromiques dont l'azimut varie brusquement de π au passage par le pôle.

2° Si les points A et B sont sur le même méridien ($g = 0$), l'équation (10) donne $\operatorname{cotg} Z = \infty$, et Z est égal à 0 ou à π selon que $(L_1 - L_2)$ est positive ou négative (éq. 11). C'est le seul cas dans lequel un arc continu de loxodromie puisse atteindre le pôle.

En effet, par l'équation (10) on a :

$$g = \operatorname{tg} Z \left[\mathcal{L} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2} \right) - \mathcal{L} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_2}{2} \right) \right].$$

Si Z est donné ainsi que les coordonnées (L_1, G_1) du point de départ A, on a, en faisant $L_2 = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$g = \pm \infty.$$

La loxodromie n'atteint donc le pôle qu'après un nombre infini de circonvolutions.

3° Si les points A et B sont situés sur le même parallèle, on a $L_1 = L_2$ et par suite $\operatorname{cotg} Z = 0$, $\cos Z = 0$. L'azimut ne peut donc avoir que les valeurs $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, et par suite les deux séries d'arcs loxodromiques considérées plus haut se confondent avec le parallèle donné.

CHAPITRE II

CARTES MARINES

31. Tant pour déterminer sa position en vue de terre que pour connaître les routes à faire entre deux points, il est indispensable au navigateur de recourir à une représentation géométrique de la surface du globe.

La surface du sphéroïde terrestre n'étant pas développable, on lui substitue d'ordinaire l'image obtenue par la projection de ses divers points sur un plan. Différents systèmes de projection ont été ainsi imaginés; la carte marine ou *Carte de Mercator* n'appartient cependant à aucun de ces systèmes : elle constitue une représentation conventionnelle, jouissant de deux propriétés capitales pour la simplification des problèmes de navigation, savoir la conservation des angles et la rectification des loxodromies.

32. **Recherche de la loi analytique du canevas.** — Si le canevas des parallèles et des méridiens de la carte réalise les conditions ci-dessus, on voit tout d'abord que ces lignes, qui sont des loxodromies, doivent être nécessairement des droites. D'ailleurs, les parallèles et les méridiens de la Terre se

coupant orthogonalement, il en est de même de leurs images; par suite, le canevas doit être constitué par un système de droites parallèles entre elles (méridiens) et perpendiculaires à un autre système de droites parallèles (images des parallèles terrestres).

Il suit de là que si nous rapportons un point A de la Terre à un méridien origine PO et à l'équateur OE par ses coordonnées G et L, puis l'image A′ de ce point sur la carte aux axes rectangulaires O′y et O′x qui sont les images de ces grands cercles, on aura les deux équations suivantes, entre les coordonnées L, G, y, x:

$$(1) \qquad y = f(\mathrm{L}) \qquad x = \mathrm{F}(\mathrm{G}),$$

les fonctions f et F étant respectivement indépendantes de G et de L.

33. Proposons-nous de déterminer les fonctions f et F de manière à ce que l'angle de deux courbes quelconques tracées sur l'ellipsoïde terrestre soit égal à l'angle de leurs images sur la carte. Cette condition est la seule qui nous reste à réaliser, la rectification des loxodromies devant en découler naturellement, puisque les méridiens de la carte sont, par hypothèse, parallèles

Considérons à cet effet un point B infiniment voisin du point A, et soit B′ son image.

Menons les méridiens PE et B′E′ des points B et B′, puis traçons le parallèle AC et son image A′C′.

Soient $(\mathrm{L}+d\mathrm{L})$, $(\mathrm{G}+d\mathrm{G})$ les coordonnées du point B, $(x+dx)$ et $(y+dy)$ celles de son image B′.

Pour que les angles soient conservés, il suffit, le

point A étant quelconque, que l'élément infiniment petit AB d'une courbe quelconque passant par A et B fasse avec l'élément de parallèle AC un angle égal à celui formé au point A′ par l'élément A′B′ avec l'image

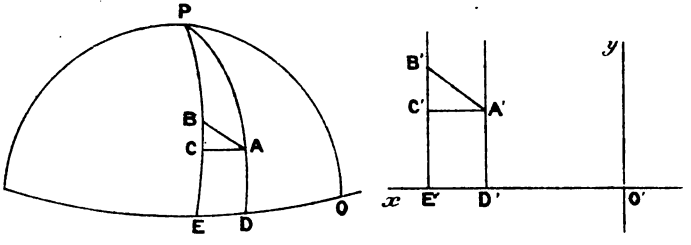


Fig. 5.

A′C′ du parallèle AC. Or les triangles rectangles infinitésimaux ABC, A′B′C′ nous donnent

$$\operatorname{tg} BAC = \frac{CB}{AC}, \qquad \operatorname{tg} B'A'C' = \frac{C'B'}{A'C'} = \frac{dy}{dx}.$$

Les angles seront donc conservés si l'on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{CB}{AC}.$$

Mais CB est l'arc de méridien compris entre les latitudes L et $L + dL$; on a donc :

$$CB = R\,dL.$$

CA est l'arc de parallèle intercepté à la latitude L par les méridiens G et $(G + dG)$; par suite $CA = \xi\,dG$, et il vient, en remplaçant :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R}{\xi}\frac{dL}{dG}.$$

Les formules du n° III (Introduction) nous donnent d'ailleurs :

$$\frac{R}{\xi} = \frac{N^2(1-\varepsilon^2)}{a^2\cos L} = \frac{(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2\sin^2 L)^{-1}}{\cos L},$$

d'où l'on conclut

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-\varepsilon^2}{\cos L(1-\varepsilon^2\sin^2 L)} \cdot \frac{dL}{dG},$$

et

$$\frac{dx}{dG} = \frac{(1-\varepsilon^2\sin^2 L)\cos L}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{dL}.$$

En appelant K la valeur commune de chacun des membres de cette équation, on a :

$$\frac{dx}{dG} = K, \qquad \frac{(1-\varepsilon^2\sin^2 L)\cos L}{1-\varepsilon^2} \cdot \frac{dy}{dL} = K.$$

D'après les équations (1), $\frac{dx}{dG}$ ou F'(G) est indépendante de L; son égal K est donc aussi indépendant de L. Mais $\frac{dy}{dL}$ est indépendant de G; donc K qui dépend de $\frac{dy}{dL}$ et d'une fonction de L est aussi indépendant de G. Par suite K, indépendant à la fois de L et de G, est une constante. et l'on a dès lors, en séparant les variables :

$$dx = K\,dG,$$

$$dy = \frac{K(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2\sin^2 L)\cos L}\,dL$$

d'où, en intégrant :

$$(2) \qquad \begin{cases} x = KG \\ y = K\displaystyle\int_0^L \frac{(1-\varepsilon^2)\,dL}{(1-\varepsilon^2\sin^2 L)\cos L}. \end{cases}$$

Telles sont les équations du canevas. La loi des longitudes est très simple. Celle des latitudes est plus compliquée; on peut facilement trouver l'expression de l'intégrale, mais elle nous serait inutile, et il nous suffit d'en avoir une valeur approchée.

On a :

$$\frac{1}{1-\varepsilon^2\sin^2 L} = 1+\varepsilon^2\sin^2 L+\varepsilon^4\sin^4 L+\dots$$

En multipliant les 2 membres par $(1-\varepsilon^2)$ et négligeant les termes en ε^6, il vient

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\sin^2 L} = 1-\varepsilon^2+\varepsilon^2\sin^2 L+\varepsilon^4\sin^4 L-\varepsilon^4\sin^2 L$$

$$= 1-\varepsilon^2\cos^2 L-\varepsilon^4\sin^2 L\cos^2 L.$$

En remplaçant dans la valeur de y, on obtient :

$$y = K\int_0^L \frac{dL}{\cos L} - K\varepsilon^2\int_0^L \cos L\,dL$$

$$-K\varepsilon^4\int_0^L \sin^2 L\cos L\,dL\,;$$

d'où

$$(3)\quad y = K\mathfrak{L}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{L}{2}\right) - K\varepsilon^2\sin L - \frac{K\varepsilon^4}{3}\sin^3 L\dots$$

34. Dans les équations (2) et (3), l'unité de longueur et la constante K sont arbitraires.

Si nous prenons $K = a$, l'équateur de la carte est le développement de l'équateur terrestre, d'après la première des équations (2). Nous considérerons non pas l'ellipsoïde terrestre lui-même, mais une réduction

de cet ellipsoïde obtenue en multipliant toutes ses dimensions par un facteur arbitraire très petit; nous ferons ensuite $K = a$ dans les équations (2) et (3), en sorte que la carte aura pour équateur le développement en vraie grandeur de l'équateur de l'ellipsoïde réduit. D'autre part, nous adopterons pour unité de longueur la minute d'équateur du globe réduit. Dans ces conditions nous aurons $a \cdot \text{arc } 1' = 1$, et par suite

$$K = a = \frac{1}{\text{arc } 1'}.$$

Exprimant enfin G non plus en radiants, mais en minutes d'arc, nous aurons pour les équations du canevas

(3')
$$\begin{cases} x = G \\ y = \dfrac{1}{\text{arc } 1'} \mathcal{L}\,\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{L}{2}\right) - \dfrac{\varepsilon^2}{\text{arc } 1'} \sin L - \dfrac{\varepsilon^4}{3 \text{arc } 1'} \sin^3 L, \end{cases}$$

l'unité de longueur étant la minute équatoriale, arbitraire d'ailleurs, d'un sphéroïde réduit, semblable à l'ellipsoïde terrestre.

35. On appelle *latitude croissante* d'un parallèle L la quantité

$$(4) \qquad \lambda = \frac{1}{\text{arc } 1'} \mathcal{L}\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right).$$

Ce serait l'ordonnée du parallèle de cote L sur la carte, si la Terre était sphérique ($\varepsilon = 0$). Il existe des

Tables de la latitude croissante; d'ailleurs on peut la calculer par les logarithmes décimaux en écrivant

$$(5) \qquad \lambda = \frac{1}{\text{arc } 1' \log e} \cdot \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right),$$

avec $$\log \frac{1}{\text{arc } 1' \log e} = 3{,}8984896.$$

En introduisant λ dans les équations du canevas, et en exprimant numériquement les termes en ε, nous avons $\frac{\varepsilon^2}{\text{arc } 1'} = 23',51$ et $\frac{\varepsilon^4}{3 \text{ arc } 1'} = 0',05$; ce dernier est donc négligeable, et l'on a :

$$(6) \qquad \begin{cases} x = G \\ y = \lambda - 23',51 \sin L. \end{cases}$$

36. Ces équations définissent le canevas des cartes dressées par le Service hydrographique de la Marine. On voit qu'elles tiennent compte de la forme ellipsoïdale de la Terre.

Cependant, afin de pouvoir contenir tous les détails nécessaires à la navigation, les cartes sont à une échelle assez grande, et chacune d'elles ne représente ainsi qu'une région limitée de la surface terrestre; il s'ensuit que, malgré cette grandeur de l'échelle, l'effet de l'excentricité n'est pas très sensible et que la série des parallèles s'écarte très peu de celle qui correspondrait à une surface rigoureusement sphérique. Soient en effet L_m la latitude du parallèle moyen de la région envisagée et L celle de l'un quelconque des autres parallèles.

La distance de ces deux parallèlles sur la carte est, d'après (6) :

$$y - y_m = \lambda - \lambda_m - 23',51 \,(\sin L - \sin L_m),$$

d'où, en développant la parenthèse en fonction de $(L - L_m)$ et s'arrêtant au premier ordre :

$$y - y_m = \lambda - \lambda_m - 23',51 \,(L - L_m) \cos L_m.$$

Exprimant $(L - L_m)$ en minutes d'arc, on a :

$$y - y_m = \lambda - \lambda_m - 23'51 \text{ arc } 1' \,(L - L_m) \cos L_m,$$

ou

$$y - y_m = \lambda - \lambda_m - 0',0068 \,(L - L_m) \cos L_m.$$

Or $\lambda - \lambda_m$ est la distance des parallèles L et L_m sur une carte représentative de la sphère de rayon égal au rayon équatorial du sphéroïde.

Si nous mettons les parallèles L_m des deux cartes en coïncidence, l'écart des deux parallèles de même côte L sera $0',0068 \,(L - L_m) \cos L_m$, c'est-à-dire proportionnel à $(L - L_m)$, mais toujours très petit. Cet écart n'atteint $1'$ pour les parallèles extrêmes que si

$$L - L_m = \pm 147' \text{ séc } L_m,$$

c'est-à-dire si la carte embrasse une zone comprenant au moins $294'$, soit près de 5° de latitude.

37. Dans une région ne s'étendant pas à plus d'une vingtaine de milles de part et d'autre du parallèle moyen, l'écart atteint au maximum $0',14$ (à l'équateur); on peut donc le négliger lorsqu'on ne vise qu'à la précision du mille pour un point en haute mer. Cette propriété nous sera utile plus tard, lorsque nous nous servirons de la carte elle-même pour y porter un lieu

astronomique du navire qui, en toute rigueur, devrait être tracé sur un canevas représentatif de la sphère céleste.

Construction des cartes.

38. **Carte générale.** — Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une carte générale. Les pôles ne peuvent être représentés sur la carte, puisque pour $L = \pm\frac{\pi}{2}$ on a $\lambda = \pm\infty$, et par suite $y = \pm\infty$. Mais cet inconvénient n'est pas grave ; car d'une part les régions circumpolaires peuvent faire l'objet de cartes particulières, et d'autre part la carte générale peut comprendre des régions assez étendues en latitude sans s'allonger outre mesure dans le sens des y. Ainsi, la carte qui représente toute la zone terrestre s'étendant entre les parallèles $+89°$ et $-89°$ a une hauteur égale à environ 1,6 fois seulement sa largeur.

Pour construire le canevas d'une carte générale on trace d'abord, d'après les dimensions de la feuille de papier, le rectangle-limite MNN'M'.

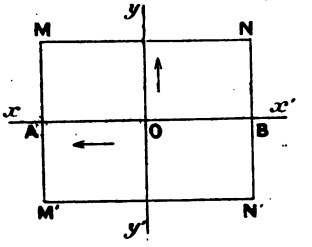


Fig. 6.

On trace ensuite deux axes rectangulaires yOy', xOx', issus du centre du rectangle et menés parallèlement à ses côtés. L'axe des y est l'image du premier méridien, l'axe des x celle de l'équateur.

Ainsi qu'on l'a vu au n° 32, on rapporte les points

de la carte à ce système d'axes, prenant comme sens positifs ceux indiqués par les flèches; les points de la Terre sont rapportés au premier méridien et à l'équateur, le sens positif des longitudes étant le sens est-ouest, et celui des latitudes étant le sens sud-nord.

Le nord de la carte est ainsi en haut de la feuille, et l'ouest à gauche. Pour le calcul, on donne aux latitudes le signe + ou le signe — selon qu'elles sont boréales ou australes, et aux longitudes le signe + ou le signe — selon qu'elles sont occidentales ou orientales. La valeur absolue d'une longitude est ainsi inférieure à 180°; les signes des x et des y déduits du calcul permettent de placer les points sur la carte sans ambiguïté.

Cela posé, on détermine la longueur métrique d'une minute équatoriale en divisant la longueur AB par $360 \times 60 = 21600$; en appelant u la valeur de ce module, exprimée par exemple en millimètres, les équations (6) nous donnent, G et L étant exprimés en minutes d'arc :

$$\begin{cases} x^{mm} = u\mathrm{G} \\ y^{mm} = u\lambda - 23{,}51u \sin \mathrm{L}. \end{cases}$$

En joignant à ce groupe l'équation (5), il est dès lors bien facile de calculer les séries des x et des y correspondants à des séries de G et de L variant par échelons égaux.

Ces calculs faits, au lieu de graduer les axes eux-mêmes, on gradue d'une part les côtés MN et M'N' du cadre suivant les valeurs métriques de x en cotant (G) le méridien (x); d'autre part, on gradue de même les côtés MM' et NN' suivant les valeurs de y cotées (L).

Il ne reste plus alors, pour achever le canevas, qu'à joindre entre eux un certain nombre de points correspondants des graduations de même nature, afin de représenter des méridiens et des parallèles en nombre suffisant pour faciliter les opérations graphiques qui se présenteront dans l'usage de la carte.

L'échelle des longitudes est une échelle régulière; celle des latitudes s'accroît avec la valeur absolue de L.

Les échelons des graduations de la latitude doivent être choisis assez petits pour que les différences de longueur de deux divisions consécutives soient insensibles : de la sorte un point dont les coordonnées sont intermédiaires à celles des graduations se place sur la carte sans difficulté.

Le canevas achevé, on pourrait placer sur la carte chaque lieu terrestre d'après ses coordonnées; dessinant ensuite la configuration des côtes, marquant les dangers, la nature du fond et sa profondeur, etc., on aurait réalisé la carte générale. Mais cette méthode serait impraticable par sa longueur; en fait on ne place sur la carte, par leurs coordonnées, qu'un certain nombre de points principaux; les détails s'obtiennent ensuite par des procédés qui sont du ressort de l'Hydrographie, et dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

39. **Cartes particulières.** — La carte générale, dont nous venons d'indiquer sommairement la construction, ne pourrait tenir en une seule feuille de papier, si l'on voulait la dresser à une échelle suffisante pour les besoins de la navigation. On est donc obligé de la sub-

diviser en plusieurs parties dont chacune constitue la carte particulière d'une région terrestre.

Le canevas de chacune de ces parties peut se construire à part, d'après les principes qui précèdent, en procédant par différences de coordonnées. Les bords latéraux de chaque carte, cotés suivant les valeurs de L, constituent l'échelle des latitudes ; de même les bords inférieur et supérieur constituent l'échelle des longitudes.

Les cartes particulières se rangent en 3 catégories, d'après les dimensions de l'ellipsoïde dont elles sont la représentation partielle :

1° *Les cartes à petits points* ou *routiers*, qui représentent une grande étendue de la Terre, et servent à la navigation en haute mer ;

2° *Les cartes à grands points*, pour la navigation le long des côtes ;

2° *Les plans*, à très grande échelle, qui représentent les entrées de baies, de rivières, de ports, certaines passes dangereuses, etc., et servent surtout pour les mouillages.

4o. **Expression d'un petit arc du méridien elliptique.** — Avant de continuer, nous allons établir de suite cette expression dont nous aurons besoin.

Appelons s l'arc du méridien terminé à la latitude L. Si L prend l'accroissement δL, on a :

$$\delta s = \delta L \cdot \frac{ds}{dL} + \frac{\delta L^2}{2} \frac{d^2 s}{dL^2} + \dots$$

ou

$$\delta s = \delta L . R + \frac{\delta L^2}{2} \frac{dR}{dL} + \dots$$

Le rayon de courbure du méridien a pour expression, en faisant $a = 1$,

$$R = (1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{3}{2}}.$$

ce qui donne :

$$\frac{dR}{dL} = \frac{3}{2}\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{5}{2}} \sin 2L.$$

Nous allons substituer cette valeur dans le développement de δs et montrer que le terme en δL^2 est négligeable pour une variation de L atteignant plusieurs centaines de minutes. Le calcul est très simple en se bornant à conserver les termes en ε^2, ceux d'un degré supérieur étant absolument inappréciables. On a, à cette approximation :

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}\varepsilon^2 \sin^2 L,$$

$$(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{-\frac{5}{2}} = 1 + \frac{5}{2}\varepsilon^2 \sin^2 L - \varepsilon^2,$$

$$\frac{dR}{dL} = \frac{3}{2}\varepsilon^2 \sin 2L,$$

$$\delta s = R\delta L + \frac{3}{4}\varepsilon^2 \delta L^2 \sin 2L.$$

Ce qui donne, en exprimant δs et δL en minutes d'équateur,

$$\delta s = R\delta L + \frac{3}{4} \text{arc } 1' \varepsilon^2 \delta L^2 \sin 2L.$$

Pour $\delta L = 300$, le maximum du terme du deuxième ordre est :

$$\frac{3 \times 3}{4 \times 10^4} \times 0{,}007 \times 9 \times 10^4 = \frac{81 \times 7}{4 \times 10^3} = 0'14 \text{ environ.}$$

Ce terme est donc réellement négligeable dans une assez grande étendue. Néanmoins on peut facilement en tenir compte, en donnant, comme l'on sait, à L la valeur $L+\frac{dL}{2}$ dans la dérivée $\frac{ds}{dL}$. Appelant L_m cette valeur de la latitude et R_m le rayon de courbure correspondant, on a ainsi, presque rigoureusement :

$$\delta s = R_m \delta L. \tag{7}$$

Échelle de la carte.

41. Considérons la carte dont l'équateur est le développement en vraie grandeur de celui de l'ellipsoïde réduit (n° 34).

Soient A et B deux points quelconques, mais voisins, sur l'ellipsoïde, et A′ et B′ leurs images sur la carte. On nomme échelle de la carte à la latitude L du point A′ la limite du rapport $\frac{A'B'}{AB}$ des distances sur la carte et sur l'ellipsoïde.

L'échelle de la carte est constante dans toutes les directions autour du point A′. Cela résulte de la similitude des petites figures correspondantes. On a en effet, en se reportant à la figure et aux équations du n° 33 :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'B'}{CB} = \frac{A'C'}{AC}$$

ou

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{dy}{R dL} = \frac{dx}{\xi dG} = \frac{K}{N \cos L};$$

d'où, par le n° III de l'introduction :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{K}{\cos L} \frac{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a}.$$

Telle est la valeur, indépendante de l'orientation de AB, de l'échelle de la carte à la latitude L; on doit d'ailleurs faire $K = a$ dans cette équation, et il vient :

$$(8) \qquad \frac{A'B'}{AB} = \text{séc } L\,(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}.$$

L'échelle est ainsi variable avec L; mais cette variation n'est pas très rapide, et l'on peut considérer comme constant le rapport de deux longueurs correspondantes finies, dans une région assez étendue de part et d'autre du parallèle L. C'est ce que nous allons montrer.

42. A cet effet, reprenons la valeur (6) de y, ou, ce qui est la même chose :

$$(9) \qquad y = \lambda - \frac{\varepsilon^2}{\text{arc } 1'} \sin L.$$

Rappelons d'abord que, dans cette équation, y est exprimée en minutes d'équateur.

Donnons à L l'accroissement l, et posons

$$L_1 = L + l$$

Posons ensuite, pour simplifier l'écriture :

$$(10) \qquad f(L) = \mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right),$$

et développons l'accroissement de $f(L)$ par la série de Taylor. On a :

$$f(L+\delta L)-f(L)=\delta L\,\frac{df}{dL}+\frac{\delta L^2}{2!}\frac{d^2f}{dL^2}+\frac{\delta L^3}{3!}\frac{d^3f}{dL^3}+\dots$$

L'équation (10) donne, par différentiations successives :

$$\frac{df}{dL}=\frac{1}{\cos L},\qquad \frac{d^2f}{dL^2}=\frac{\sin L}{\cos^2 L},\qquad \frac{d^3f}{dL^3}=\frac{1+\sin^2 L}{\cos^3 L}.$$

Avant de faire les substitutions, donnons à L dans l'équation (10) la valeur particulière $L_m=\frac{L_1+L}{2}$, latitude moyenne. Nous aurons alors, en donnant successivement à δL les valeurs $+\frac{l}{2}$ et $-\frac{l}{2}$:

$$f\left(L_m+\frac{l}{2}\right)-f(L_m)=\frac{l}{2}\,\text{séc}\,L_m+\frac{l^2}{8}\sin L_m\,\text{séc}^2 L_m$$
$$+\frac{l^3}{48}(1+\sin^2 L_m)\,\text{séc}^3 L_m+\dots$$

$$f\left(L_m-\frac{l}{2}\right)-f(L_m)=-\frac{l}{2}\,\text{séc}\,L_m+\frac{l^2}{8}\sin L_m\,\text{séc}^2 L_m$$
$$-\frac{l^3}{48}(1+\sin^2 L_m)\,\text{séc}^3 L_m+\dots$$

d'où, par soustraction, et en remarquant que

$$L_1=L_m+\frac{l}{2},\quad L=L_m-\frac{l}{2}:$$

$$f(L_1)-f(L)=l\,\text{séc}\,L_m+\frac{l^3}{24}(1+\sin^2 L_m)\,\text{séc}^3 L_m,$$

en supposant l assez petit pour qu'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur au 3e.

En exprimant l en minutes d'arc, nous avons :

$$f(L_1) - f(L) = l \operatorname{arc} 1' \operatorname{séc} L_m + \frac{l^3 \operatorname{arc}^3 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m.$$

Par un procédé analogue on obtiendrait, l étant également exprimée en minutes :

$$\sin L_1 - \sin L = l \operatorname{arc} 1' \cos L_m - \frac{l^3 \operatorname{arc}^3 1'}{24} \cos L_m.$$

Or, si dans l'équation (9) nous donnons à L l'accroissement l, il vient :

$$\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\varepsilon}{\operatorname{arc} 1'} \sin L_1,$$

d'où, par différence :

$$\gamma_1 - \gamma = \lambda_1 - \lambda - \frac{\varepsilon^2}{\operatorname{arc} 1'} (\sin L_1 - \sin L);$$

et, si l'on se reporte à la définition de λ (équation 4) :

$$\lambda_1 - \lambda = \frac{1}{\operatorname{arc} 1'} \left[\mathfrak{L} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2} \right) - \mathfrak{L} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arc}' 1} [f(L_1) - f(L)].$$

Il vient donc, en substituant et réduisant :

$$\gamma_1 - \gamma = l \operatorname{séc} L_m (1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m) + \frac{l^3 \operatorname{arc}^2 1'}{24} [(1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m + \varepsilon^2 \cos L_m].$$

Désignons, pour abréger, $(\gamma_1 - \gamma)$ par $\delta\gamma$. On a :

$$(11) \qquad \frac{\delta\gamma}{l} = \operatorname{séc} L_m (1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m) + \frac{l^2 \operatorname{arc}^2 1'}{24} [(1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m + \varepsilon^2 \cos L_m].$$

Considérons maintenant deux parallèles terrestres ayant une différence de latitude l', mais même latitude moyenne L_m que plus haut. La différence d'ordonnées sur la carte étant $\delta y'$, on aura :

$$\frac{\delta y'}{l'} = \text{séc } L_m (1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m)$$

$$+ \frac{l'^2 \text{ arc}^2 1'}{24} [(1 + \sin^2 L_m) \text{ séc}^3 L_m + \varepsilon^2 \cos L_m].$$

Posant pour un instant :

$$\alpha = \text{séc } L_m (1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m),$$

$$\mu = 2^e \text{ terme de } \frac{\delta y}{l},$$

$$\mu' = 2^e \text{ terme de } \frac{\delta y'}{l'},$$

on a :

$$\frac{\frac{\delta y'}{l'}}{\frac{\delta y}{l}} = \frac{\alpha + \mu'}{\alpha + \mu};$$

d'où

$$\frac{l}{\delta y} = \frac{l'}{\delta y'} \frac{1 + \frac{\mu'}{\alpha}}{1 + \frac{\mu}{\alpha}}.$$

Ce qui donne, en négligeant les termes en l^4 et supérieurs :

$$\frac{l}{\delta y} = \frac{l'}{\delta y'} \left(1 + \frac{\mu'}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha}\right).$$

La différence $\left(\frac{\mu'}{\alpha} - \frac{\mu}{\alpha}\right)$ est inférieure en valeur

absolue au plus grand de ces deux termes, soit à :

$$\frac{\mu'}{\alpha} = \frac{l'^2 \operatorname{arc}^2 1'}{24} \left[(1 + \sin^2 L_m) \sec^2 L_m + \varepsilon^2 \cos^2 L_m\right](1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m)^{-1}.$$

Pour $L_m = \pm 60°$, on trouve : $\frac{\mu'}{\alpha} < \frac{2{,}6\, l'^2}{10^8}$.

On a donc :

$$\frac{l}{\delta y} = \frac{l'}{\delta y'}(1 + \nu), \quad \text{avec} \quad \nu < \frac{2{,}6\, l'^2}{10^8}$$

43. Considérons sur l'ellipsoïde un arc loxodromique AB, de longueur M, faisant avec le méridien de A un angle quelconque V.

Menons le parallèle BC du point B, et construisons sur la carte l'image A'B'C' du triangle ABC.

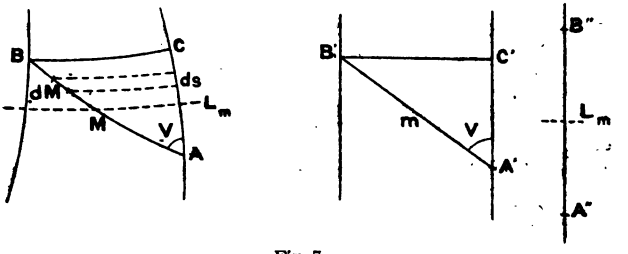


Fig. 7.

En projetant parallèlement à l'équateur un arc infiniment petit dM de AB sur le méridien AC, on a :

$$dM = ds \sec V,$$

d'où, en intégrant et en désignant la longueur de AC par δs :

$$M = \delta s \sec V.$$

D'autre part, sur la carte nous avons :

$$m = A'C' \text{ séc } V = \delta y \text{ séc } V.$$

Par suite, $$\frac{M}{m} = \frac{\delta s}{\delta y}.$$

Mais si l est la différence de latitude des points A et B, on a, d'après le n° 40 :

$$\frac{M}{m} = \frac{l R_m}{\delta y},$$

R_m étant le rayon de courbure correspondant au parallèle moyen L_m.

Prenons une ouverture de compas égale à $A'B' = m$, et portons-la sur l'échelle des latitudes, en A''B'', de manière à ce que la moyenne des cotes des points A'' et B'' soit précisément L_m. La différence des cotes sera l' et leur écartement linéaire, en minutes d'équateur, sera $\delta y' = m$.

Remplaçons dans l'équation précédente $\frac{l}{\delta y}$ par la valeur en fonction de $\frac{l'}{\delta y'}$. On a, d'après ce qui termine le n° 42 :

$$\frac{M}{m} = R_m \frac{l'}{\delta y'} (1 + \nu),$$

ou, comme nous avons pris $\delta y' = m$:

$$M = R_m l' + R_m \nu l'.$$

Or on a :

$$R_m = (1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 L_m)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ce qui donne, à l'approximation des termes en ε^4 près :

$$R_m = 1 - \varepsilon^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 L_m\right),$$

d'où, en remplaçant :

$$M = l' - \varepsilon^2 l' \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 L_m\right) + R_m \nu l'.$$

Pour $L_m = \pm 60°$, le terme $R_m \nu l'$ est inférieur à $R_m \cdot \frac{2{,}6\, l'^3}{10^8}$, ce qui donne environ o',2 pour $l = 200'$. D'autre part, le terme en ε^2 a pour valeurs extrêmes $-\varepsilon^2 l'$ et $+\frac{1}{2}\varepsilon^2 l'$ qui est supérieure à $R_m \nu l'$ si l' n'est pas trop grand ; par suite, on peut écrire :

$$M = l'.$$

avec une erreur inférieure en valeur absolue à $\varepsilon^2 l'$ ou o, oo68 l'. Cette erreur est donc négligeable pour les opérations sur les cartes à grands points qui seules demandent quelque précision ; sur les cartes à petits points elle dépasse à peine 1' pour $l' = 200'$, soit $M = 200$ milles.

44. On voit ainsi que l'échelle des latitudes constitue l'*échelle des distances* de la carte. Pour avoir, en minutes équatoriales de l'ellipsoïde, c'est-à-dire en milles, la distance loxodromique sur la Terre de deux points marqués sur la carte, il suffit de porter sur l'échelle des latitudes une ouverture de compas égale à la distance de ces points sur la carte, et de lire le nombre de minutes de la graduation compris entre les pointes du compas.

Cette ouverture de compas doit être portée, d'après ce qui précède, de manière à ce que la moyenne des graduations, entre les pointes, soit égale à la latitude moyenne des deux points considérés; mais il n'est pas nécessaire d'appliquer cette prescription en toute rigueur : il suffit d'y satisfaire à peu près, l'échelle des latitudes étant sensiblement régulière dans une assez grande étendue. Nous allons le montrer, et donner en même temps la valeur numérique de l'échelle de la carte.

45. A cet effet, remarquons que si L_m reste comprise entre $-60°$ et $+60°$, le terme du 3e ordre de δy tiré de la formule (11) est négligeable pour de petites valeurs de l : il reste inférieur à 0',05 pour $l = 100'$ et à 0',4 pour $l = 200'$. On peut donc écrire, dans ces limites :

$$\delta y = l \sec L_m (1 - \varepsilon^2 \cos^2 L_m),$$

ou

$$\frac{\delta y}{l} = \sec L_m - \varepsilon^2 \cos L_m.$$

On vient de voir, aux nos 43 et 44, que le rapport $\frac{\delta y}{l}$ pouvait être considéré comme égal à $\frac{m}{M}$, échelle de la carte dans une étendue petite, mais finie, autour du parallèle L_m, pour des valeurs de M inférieures à 200 milles.

L'équation précédente nous donne donc la valeur numérique constante de cette échelle; on peut même négliger le terme en ε^2 et prendre simplement :

$$\frac{\delta y}{l} = \sec L_m, \tag{12}$$

à moins de 0,0068 près, puisque $\varepsilon^2 \cos L_m$ est inférieur à ce nombre.

En particulier, si η est la valeur, en minutes équatoriales, de la division 1′ sur l'échelle des latitudes, on a en faisant $l = 1$ et $L_m = L$:

$$\eta = \text{séc } L,$$

sans que l'erreur atteigne 0,0068 d'une minute équatoriale. Pour une carte à grands points, sur laquelle η serait représentée par 40 millimètres, cette erreur n'atteindrait pas $0^{mm},3 \cos L$, ce qui est négligeable pour l'objet qui va suivre.

Donnons à L la valeur $L_1 = L + dL$ et cherchons la différence entre les longueurs η_1 et η_2 correspondantes à L_1 et à L. On aura :

$$\eta_1 - \eta = \frac{\sin L}{\cos^2 L} dL.$$

Mais $(\eta_1 - \eta)$ est exprimée, comme plus haut, en minutes équatoriales, tandis que dL l'est en radiants. En appelant l la valeur de dL en minutes d'arc, on a donc

$$\eta_1 - \eta = \frac{\sin L}{\cos^2 L} l \text{ arc } 1' = \frac{3l}{10^4} \text{ tg } L \text{ séc } L,$$

ou à cause de $\eta = \text{séc } L$:

$$\frac{\eta_1 - \eta}{\eta} = \frac{3l}{10^4} \text{ tg } L.$$

Cette expression croît avec L, en valeur absolue. Pour $L = \pm 60°$ on aurait, en valeur absolue :

$$\frac{\eta_1 - \eta}{\eta} = \frac{5,2l}{10^4} = \frac{1}{2} l \frac{1}{10^3} \text{ environ.}$$

Pour $l = 60'$, c'est-à-dire sur toute l'étendue d'un degré, on aurait donc

$$\frac{\eta_1 - \eta}{\eta} = 0{,}03,$$

et pour la carte envisagée plus haut, la longueur de η varierait de $40^{mm},0$ à $41^{mm},2$. On voit ainsi combien l'échelle des latitudes, et par suite celle de la carte, est peu différente d'une échelle régulière dans une assez grande étendue.

Usage des cartes.

46. Les cartes permettent de résoudre divers problèmes, généraux et particuliers.

Les problèmes généraux peuvent s'énoncer ainsi :

1° Connaissant les coordonnées terrestres (L, G) d'un point, marquer ce point sur la carte, et inversement.

2° Étant donnés deux points, trouver la direction et la longueur de la loxodromie la plus courte joignant ces points.

3° Inversement, étant donné un arc de loxodromie, en longueur et direction, issu d'un point donné, trouver le point d'arrivée.

Ces deux derniers problèmes peuvent se résoudre par le calcul, comme nous le verrons ; l'emploi de la carte est cependant indispensable, car le navigateur doit s'assurer que la route à suivre n'est pas dangereuse, et la carte seule permet de la tracer en conséquence.

47. **Problèmes généraux.** — 1° Marquer sur la carte l'image d'un point terrestre de coordonnées (G, L).

Sur l'échelle des latitudes, marquons le point de cote L, et sur celle des longitudes le point de cote G. D'après le mode de représentation adopté, il est clair que les perpendiculaires aux échelles, menées par ces points, se couperont au point cherché.

Pratiquement, on prend au compas d'une part la distance du point (L) au parallèle voisin effectivement tracé sur la carte, d'autre part la distance du point (G) au méridien voisin; on reporte ces distances sur le méridien et le parallèle, à partir de leur intersection, et l'on mène par les extrémités des segments les perpendiculaires qui se coupent au point cherché.

Le problème inverse est résolu d'une manière analogue, en opérant en ordre inverse.

48. 2° Trouver la route à faire entre deux points donnés.

Joindre les deux points par une droite. En mesurant au rapporteur l'angle de cette droite avec l'un des méridiens qu'elle rencontre, on obtient la direction de la loxodromie, d'après la propriété fondamentale de la carte marine.

Pour avoir la distance des points en milles, on prend une ouverture de compas égale à la distance de ces points sur la carte, puis on porte cette ouverture de compas sur l'échelle des latitudes, les pointes étant placées de part et d'autre du parallèle moyen. Le nombre de minutes compris entre les pointes du compas est égal à la distance en milles cherchée (n° 44).

Si le compas employé est trop petit pour que l'on puisse opérer ainsi, on prend, de part et d'autre du parallèle moyen, une ouverture de compas égale à un

nombre entier n de minutes de latitude, puis on porte cette distance le long de la loxodromie, le plus grand nombre de fois possible par défaut, p.

La distance en milles est pn, plus un reste qu'on évalue, comme plus haut, sur l'échelle des latitudes.

Si la distance en milles était très grande, on introduirait, en opérant ainsi, une erreur qui pourrait devenir sensible, surtout par les hautes latitudes.

Pour s'en affranchir, il suffit de diviser la loxodromie en parties inférieures à 200 milles (n° 43) et d'appliquer à chacune de ces parties la règle précédente.

49. 3° Étant donné un arc de loxodromie, en longueur et direction, issu d'un point donné, trouver le point d'arrivée.

Soit A le point de départ. On trace d'abord la droite AC, faisant avec le méridien AB l'angle de route donné V. On prend ensuite sur l'échelle des latitudes, à partir du parallèle AA′ du point de départ, une ouverture de compas embrassant un nombre de minutes égal au nombre de milles donné. Portant cette ouverture de compas en AH, le point H est le point d'arrivée cherché.

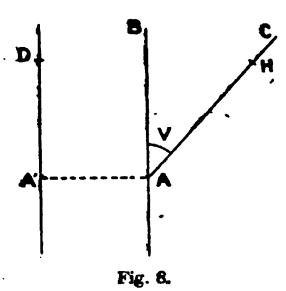


Fig. 8.

Il faut avoir soin de prendre le point D du côté de la projection de AC sur l'échelle des latitudes. Si la distance donnée était très grande, on a déjà compris que le point H serait une première approximation qui

ferait connaître le parallèle moyen de part et d'autre duquel on devrait prendre la distance; mais on n'a besoin de résoudre ce problème par la carte que pour de petites distances.

5o. **Problèmes particuliers.** — Outre les problèmes précédents, les cartes permettent d'en résoudre d'autres, qui se présentent dans la navigation le long des côtes et qui sont particuliers aux cartes à grands points.

Lorsqu'on envisage une petite région de la Terre, comprenant tous les points de la côte en vue, la courbure de la surface est insensible, et l'on peut considérer cette région comme se confondant avec le plan tangent à l'ellipsoïde. La carte marine de la région est alors, à cause de la similitude des petites figures correspondantes, une représentation de ce plan tangent, à une échelle sensiblement égale à séc L (n° 45).

Il suit de là que les verticales des divers lieux peuvent être regardées comme parallèles entre elles; l'intersection de la surface de la mer par un vertical quelconque est une droite le long de laquelle l'azimut est constant, c'est-à-dire une loxodromie représentée sur la carte par une droite de même orientation. Les opérations graphiques faites en vue d'obtenir la position du navire en rapportant sur la carte des observations de distances métriques et d'angles azimutaux sont donc des plus simples.

Toutefois il est utile de se rendre compte de l'importance des erreurs commises, afin de savoir dans quelles limites il est permis d'appliquer le principe précédent. C'est ce que nous allons faire tout d'abord.

Pour cet objet nous regarderons la petite région terrestre considérée comme rigoureusement sphérique.

51. **Variation de l'azimut pour un petit déplacement le long d'un grand cercle de la sphère.** — Considérons les deux points voisins A(L, G) et $A_1(L_1, G_1)$ et posons

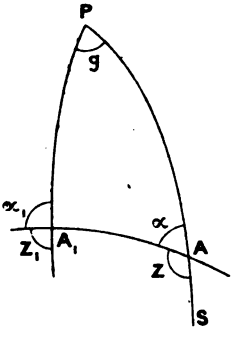


Fig. 9.

$$L_1 = L + l,$$

$$G_1 = G + g,$$

$$L_m = \frac{L + L_1}{2}.$$

Traçons l'arc de grand cercle AA_1 et désignons par M la longueur de l'arc AA_1. Soit P le pôle nord.

Dans le triangle sphérique formé par AA_1 et les méridiens des extrémités, on a, par les analogies de Néper :

$$\operatorname{tg}\frac{PAA_1 + PA_1A}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(PA - PA_1)}{\cos\frac{1}{2}(PA + PA_1)} \operatorname{cotg}\frac{APA_1}{2}.$$

Mais P étant le pôle nord, on a :

$$PA = \frac{\pi}{2} - L, \qquad PA_1 = \frac{\pi}{2} - L_1.$$

D'ailleurs, l'angle sphérique APA_1 n'est autre chose que g, en prenant le rayon de la sphère pour unité; il

vient donc, en introduisant les angles α et α_1 marqués sur la figure :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\pi-\alpha_1}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(L_1-L)}{\cos\frac{1}{2}[\pi-(L_1+L)]}\operatorname{cotg}\frac{g}{2};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha_1-\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}l}{\sin L_m}\operatorname{cotg}\frac{g}{2}.$$

Désignons d'une manière générale par Z l'angle azimutal formé en un point A par la partie sud du méridien avec la partie du grand cercle AA_1 dirigée dans le sens du déplacement. C'est cet azimut, compté à partir de AS dans le sens rétrograde, dont nous voulons trouver la variation. Or on a :

$$\alpha=\pi-Z, \qquad \alpha_1=\pi-Z_1.$$

En remplaçant et renversant, il vient :

$$(13) \qquad \operatorname{tg}\frac{Z-Z_1}{2}=\frac{\sin L_m}{\cos\frac{1}{2}l}\operatorname{tg}\frac{g}{2}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons pour un instant :

$$\frac{Z-Z_1}{2}=u, \qquad \frac{\sin L_m}{\cos\frac{1}{2}l}=\alpha, \qquad \frac{g}{2}=\gamma.$$

L'équation 13 devient :

$$(14) \qquad \operatorname{tg} u=\alpha \operatorname{tg}\gamma.$$

γ étant petit par hypothèse et u s'annulant avec γ, nous aurons par la série de Mac-Laurin :

$$u = \gamma\left(\frac{du}{d\gamma}\right)_0 + \frac{\gamma^2}{2!}\left(\frac{d^2u}{d\gamma^2}\right)_0 + \frac{\gamma^3}{3!}\left(\frac{d^3u}{d\gamma^3}\right)_0 + \cdots$$

L'équation (14) nous donne :

$$\frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{d\gamma} = \alpha\frac{1}{\cos^2\gamma}, \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{du}{d\gamma}\right)_0 = \alpha,$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}\frac{d^2u}{d\gamma^2} + \frac{2\cos u \sin u}{\cos^4 u}\left(\frac{du}{d\gamma}\right)^2 = \alpha\frac{2\cos\gamma\sin\gamma}{\cos^4\gamma},$$

$$\frac{1}{\cos^2 u}\frac{d^2u}{d\gamma^2} + 2\frac{\sin u}{\cos^3 u}\left(\frac{du}{d\gamma}\right)^2 = 2\alpha\frac{\sin\gamma}{\cos^3\gamma},$$

d'où

$$\left(\frac{d^2u}{d\gamma^2}\right)_0 = 0.$$

Je différentie maintenant sans écrire les termes en $\frac{d^2u}{d\gamma^2}$ qui s'annulent pour $\gamma = 0$:

$$\frac{1}{\cos^2 u}\frac{d^3u}{d\gamma^3} + 2\frac{\cos^4 u + 3\sin^2 u\cos^2 u}{\cos^6 u}\left(\frac{du}{d\gamma}\right)^3 + \cdots$$

$$= 2\alpha\frac{\cos^4\gamma + 3\sin^2\gamma\cos^2\gamma}{\cos^6\gamma},$$

d'où

$$\left(\frac{d^3u}{d\gamma^3}\right)_0 = 2\alpha - 2\alpha^3.$$

Substituant ces valeurs dans la série, on obtient :

$$u = \alpha\gamma + \frac{\gamma^3}{3}\alpha(1 - \alpha^2),$$

en s'arrêtant au troisième ordre. Revenant aux notations primitives, on a :

$$\frac{Z-Z_1}{2}=\frac{g}{2}\cdot\frac{\sin L_m}{\cos\frac{1}{2}l}+\frac{g^3}{24}\frac{\sin L_m}{\cos\frac{1}{2}l}\left(1-\frac{\sin^2 L_m}{\cos^2\frac{1}{2}l}\right).$$

Mais au 4e ordre près, on a aussi :

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}l}=\frac{1}{1-\frac{l^2}{8}+\ldots}=1+\frac{l^2}{8}.$$

Ce qui donne, à cette approximation :

$$Z-Z_1=g\sin L_m\left(1+\frac{l^2}{8}\right)$$

$$+\frac{g^3}{12}\sin L_m\left(1+\frac{l^2}{8}\right)\left[1-\sin^2 L^m\left(1+\frac{l^2}{4}\right)\right],$$

c'est-à-dire, en supprimant les termes du cinquième ordre et au-dessus :

$$Z-Z_1=g\sin L_m\left(1+\frac{l^2}{8}\right)+\frac{g^3}{12}\sin L_m\cos^2 L_m,$$

ou :

$$Z-Z_1=g\sin L_m+\frac{gl^2}{8}\sin L_m+\frac{g^3}{12}\sin L_m\cos^2 L_m.$$

Or les termes du troisième ordre sont eux-mêmes insignifiants quand M est petit et peuvent être négligés. Pour le bien voir, exprimons d'abord $(Z-Z_1)$, g et l en minutes d'arc. On aura :

(15) $$Z-Z_1=g\sin L_m$$

$$+\frac{gl^2}{8}\text{arc}^2\,1'\,.\,\sin L_m+\frac{g^3}{12}\text{arc}^2\,1'\sin L_m\cos^2 L_m.$$

Pour trouver une limite de la somme des termes du troisième ordre, nous allons remplacer g et l par leurs valeurs en fonction de M, et, puisque ces termes sont très petits, il nous suffira d'employer des valeurs approchées. Pour cela, considérons sur la carte la loxodromie passant par les images A′ et A'_1 des points A et A_1. Soit V l'angle de route, d'ailleurs très peu différent de $(\pi - Z)$. Menons le parallèle A'_1B. On a d'abord $A'_1B = g$. Ensuite, d'après le n° 45, nous prendrons séc L_m pour valeur numérique de l'échelle de la carte, et l'on aura :

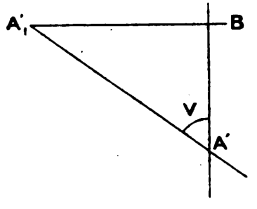


Fig. 10.

$$A'B = l \text{ séc } L_m,$$

$$A'A'_1 = AA_1 \text{ séc } L_m.$$

Nous pouvons d'ailleurs confondre la longueur de l'arc loxodromique AA_1 avec M, la différence étant du troisième ordre (n° 77). On a donc

$$A'A'_1 = M \text{ séc } L_m.$$

D'autre part, le triangle $BA'A'_1$ nous donne

$$A'_1B = A'A'_1 \sin V,$$

$$A'B = A'A'_1 \cos V,$$

c'est-à-dire, d'après ce qui précède :

$$(16) \quad \begin{cases} g = M \text{ séc } L_m \sin V, \\ l \text{ séc } L_m = M \text{ séc } L_m \cos V, \quad \text{ou} \quad l = M \cos V. \end{cases}$$

Il vient ainsi, pour la somme des termes du troisième ordre de la formule (15) :

$$\frac{1}{8} M^3 \operatorname{arc}^2 1' \operatorname{tg} L_m \sin V \cos^2 V + \frac{1}{12} M^3 \operatorname{arc}^2 1' \operatorname{tg} L_m \sin^3 V$$

$$= \frac{1}{4} M^3 \operatorname{arc}^2 1' \operatorname{tg} L_m \sin V \left(\frac{1}{2} \cos^2 V + \frac{1}{3} \sin^2 V \right),$$

La parenthèse étant inférieure à $\frac{1}{2}$, la somme est elle-même inférieure à

$$\frac{1}{8} M^3 \operatorname{arc}^2 1' \operatorname{tg} L_m \sin V = \frac{9}{8 \times 10^8} M^3 \operatorname{tg} L_m \sin V.$$

Pour $V = 90°$, $M = 100'$, $L_m = \pm 60°$, ce terme est $0',02$. Même pour des valeurs extrêmes telles que $V = 90°$, $M = 300'$, $L_m = \pm 85°$, il ne s'élève qu'à $3'$ environ, ce qui est négligeable lorsqu'il s'agit de porter un angle sur la carte à l'aide du rapporteur. Nous pouvons donc supprimer les termes du troisième ordre et écrire :

$$(17) \qquad Z - Z_1 = g \sin L_m.$$

52. **Différence entre l'azimut loxodromique et l'azimut initial de l'arc de grand cercle joignant deux points voisins sur la sphère.** — Considérons sur la sphère 2 points voisins A et B, et soient A' et B' leurs images sur la carte. Du point A observons l'azimut Z du point B.

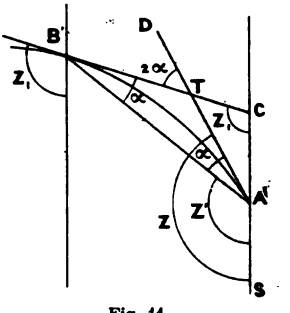


Fig. 11.

En portant cet angle sur la carte au point A' nous obtiendrons la tangente A'D à l'image de l'arc de grand

cercle AB, intersection de la surface de la sphère par le vertical de B, puisque la carte conserve les angles.

Nous verrons plus loin que l'image d'un grand cercle, les méridiens et l'équateur exceptés, est une courbe sinueuse présentant toujours sa concavité à l'équateur et ayant ses points d'inflexion sur cette ligne.

La figure ci-contre, dans laquelle l'image de l'arc AB est concave vers le bas, suppose donc les points A et B dans l'hémisphère nord. Ces points étant voisins, nous admettrons[1] que l'image de l'arc de grand cercle se confond avec son cercle osculateur dans toute la région A'B'. Les angles que les tangentes A'T et B'T aux extrémités de l'arc de cercle A'B' font avec la corde A'B' sont alors égaux, et l'on a :

$$TB'A' = TA'B' = \alpha = \frac{DTB'}{2}.$$

Or l'angle DTB' des tangentes est égal à la différence des azimuts aux points A' et B', ainsi qu'on le voit par le triangle A'CT. On a ainsi :

$$DTB' = Z - Z_1,$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{Z - Z_1}{2}.$$

En remplaçant $(Z - Z_1)$ par sa valeur (17), il vient :

$$\alpha = \frac{1}{2} g \sin L_m.$$

D'autre part, on voit sur la figure que α est la dif-

[1] Voir n° 224.

férence entre l'azimut Z et l'azimut loxodromique SA'B' = Z' :

$$\alpha = Z - Z'.$$

On a donc :

$$Z - Z' = \frac{1}{2} g \sin L_m,$$

d'où :

$$Z' = Z - \frac{1}{2} g \sin L_m. \qquad (18)$$

Ainsi, ayant observé sur la Terre l'azimut Z d'un point B, pour obtenir sur la carte l'azimut de la loxodromie passant par l'image B' de B, il faut retrancher de l'angle observé la petite correction $\frac{1}{2} g \sin L_m$, nommée *correction de Givry*. Cette correction est algébrique, et la formule est générale.

Du reste il ne saurait y avoir d'ambiguïté sur son sens, puisque, d'après la remarque que nous avons faite au sujet de la concavité de l'image de l'arc de grand cercle, la correction a pour effet de rapprocher le point B' de l'équateur. La correction est nulle à l'équateur ($L_m = 0$), et en effet le cercle osculateur s'y confond avec la corde A'B', l'image du grand cercle avec celle de la loxodromie.

53. Il n'y a lieu de tenir compte de la correction de Givry que dans la construction des cartes; à la mer, pour les opérations graphiques sur la carte, on peut généralement la négliger. En effet, si dans la première des équations (16) on remplace l'angle de route V par son égal $(\pi - Z')$, on a :

$$g = M \text{ séc } L_m \sin Z',$$

et la formule (18) devient :

$$(19) \qquad Z' = Z - \frac{1}{2} M \operatorname{tg} L_m \sin Z'.$$

Pour

$$L_m = \pm 60°, \quad Z' = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2}, \quad M = 10 \text{ milles},$$

la correction de Givry serait seulement de 9′, précision à laquelle les rapporteurs ordinaires ne peuvent pas prétendre. Mais en dehors de ces limites de latitude et de distance, il serait bon d'y faire attention. Nous verrons qu'il y a également lieu, quelquefois, d'appliquer la formule (19) dans le tracé d'une droite de hauteur.

54. **Point en vue de terre.** — Nous pouvons maintenant aborder la résolution des problèmes, particuliers aux cartes à grands points, qui ont pour objet la détermination de la position du navire en vue d'une côte.

Cette position du navire, ou *point*, est obtenue par l'intersection de lieux géométriques dont on se procure les éléments par l'observation des points terrestres en vue. Ces observations sont de 4 espèces :

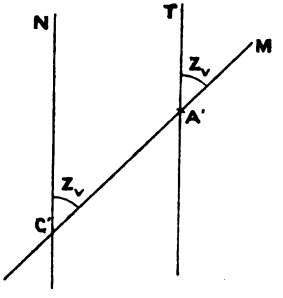


Fig. 12.

1° Relèvement d'un objet.

55. On prend le relèvement au compas d'un point connu A de la Terre dont l'image est marquée sur la carte en A′. Corrigeant le relèvement observé de la variation, on obtient le relèvement vrai Z_v. La correction de Givry étant négligeable dans le cas présent (n° 53),

si nous joignons sur la carte le point A′ à l'image C′ du navire, l'angle NC′A′ est égal à Z_v, C′N étant le méridien de C′.

Par suite, pour avoir un lieu de C′ il suffit de tracer une droite faisant au point A′, avec le méridien A′T de ce point, un angle TA′M égal à Z_v et de prolonger cette droite en A′C′, c'est-à-dire en sens contraire de sa direction primitive.

2° Angle azimutal de deux objets.

56. On vise successivement les deux objets à l'aide de la pinnule du compas de relèvement; la différence des relèvements au compas donne la différence d'azimut des points. Si le navire n'embarde pas, on peut se servir du cercle gradué de la cuvette qui sert de limbe à la pinnule.

Le roulis étant une cause d'erreur, il est préférable d'observer au sextant l'angle des deux objets, généralement peu élevés sur l'horizon. On peut d'ailleurs, avec un peu d'habitude, prendre l'angle non pas dans le plan de l'œil et des objets, mais en amenant les images sur une ligne sensiblement verticale : cette observation est facilitée lorsque l'un des objets présente un axe vertical (clocher, phare, etc.).

L'angle azimutal étant mesuré, le lieu du navire sur la carte s'obtient en construisant sur les deux objets un segment capable de l'angle observé : les deux loxodromies qui joignent ces objets au navire font en effet, entre elles, un angle égal à la différence d'azimut, la correction de Givry étant négligeable pour ces petites distances.

3° Alignement de deux objets.

57. Lorsque deux objets passent l'un par l'autre, ou

par le même plan vertical, leur différence d'azimut est nulle et le lieu du navire s'obtient en traçant sur la carte la droite qui joint les images des points observés.

4° Mesure de la distance à un objet.

58. Lorsqu'on connaît la hauteur verticale H d'un objet, on observe au télémètre ou au sextant la hauteur angulaire α comprise entre la base et le sommet. La distance x de l'objet au navire est donnée par la formule $x = \mathrm{H}\cotg\alpha$, indépendante de la réfraction qui affecte également les rayons issus du pied et du sommet de l'objet.

La base de l'objet et l'observateur étant généralement peu élevés, la distance calculée est sensiblement égale à sa projection sur l'arc de grand cercle passant par leurs projections horizontales; pour obtenir un lieu du navire, il ne reste plus qu'à exprimer la distance en milles, et à décrire de l'image de l'objet sur la carte une circonférence de rayon égal à ce nombre de milles (échelle des latitudes) : en effet, la distance loxodromique ne diffère pas, dans cette petite étendue, de la distance suivant l'arc de grand cercle (n° 77).

59. Mais lorsque le pied de l'objet est au delà de l'horizon apparent, on est obligé de tenir compte de la réfraction. En appelant H l'altitude du sommet de l'objet, h altitude de l'observateur, α la hauteur angulaire apparente du sommet au-dessus de l'horizon de la mer, d la dépression de cet horizon (n° 146), et enfin x la distance cherchée, on a[1] :

$$\mathrm{H} - h = x\,\mathrm{tg}\left[\alpha - d + x\,\frac{1-2\gamma}{2\rho\,\mathrm{arc}\,1''}\right].$$

[1] Germain, 1, p. 299.

Dans cette formule, γ est le coefficient de la réfraction terrestre dont la valeur moyenne est 0,08 (n° 146) et ρ le rayon de courbure moyen à la latitude considérée; il est suffisant de remplacer ρ par a, la précision que l'on peut espérer étant faible à cause de l'incertitude de γ et de d. La formule peut être mise en table à double entrée ayant pour arguments $(H - h)$ et $(z - d)$ (T. XV Friocourt, XII Caillet).

60. **Combinaison des lieux géométriques.** — Pour obtenir le lieu du navire sur la carte, il suffit de tracer deux lieux géométriques.

Pour une bonne détermination, il est nécessaire de ne pas employer des lieux se coupant sous un angle inférieur à 30° ou supérieur à 150°.

Afin de se mettre en garde contre les erreurs d'observation, il est toujours prudent de tracer au moins 3 lieux du navire.

61. La combinaison la plus commode, et par suite la plus fréquemment employée, consiste à employer trois relèvements. En général on obtient ainsi non un point, mais un petit triangle à l'intérieur duquel on place le navire. La position la plus probable s'obtiendrait en tenant compte de ce que l'erreur probable d'un relèvement est proportionnelle à la distance du navire à l'objet relevé; mais cette recherche n'a pas d'importance, car il ne faut admettre les observations que si les dimensions du triangle sont très petites : autrement il y a lieu de soupçonner une erreur dans la variation. Dans ce cas, on pourrait conclure la vraie position du navire des deux segments capables fournis par les différences des 3 relèvements; mais comme on peut aussi

bien supposer que l'un des relèvements est fortement erroné par suite d'une erreur de lecture ou pour toute autre cause, il est prudent de rejeter l'observation et de recommencer les mesures, ou mieux de prendre les angles au sextant, ce qui met la variation hors de cause et permet de la contrôler.

62. Le point par la combinaison de deux segments capables s'obtient facilement et rapidement à l'aide du *stigmographe* du commandant Banaré. On doit observer un troisième angle, et contrôler sur-le-champ l'exactitude de la position obtenue en vérifiant, au moyen du stigmographe lui-même, si le 3e angle, mesuré sur la carte, ne diffère pas de la valeur observée. Il peut arriver en effet que, abstraction faite des erreurs d'observation, la détermination soit mauvaise : tel serait le cas si la position cherchée se trouvait à peu près sur la circonférence passant par les 3 premiers points observés.

63. Le lieu obtenu par la mesure de la distance à un objet de hauteur connue se combine généralement avec le relèvement de cet objet. La distance est peu précise, surtout quand l'objet est au delà de l'horizon apparent ; mais comme il s'agit, dans ce cas, d'un point d'atterrissage, la précision n'a pas une grande importance, et l'on a tout le loisir de rectifier cette première approximation dès que l'approche de la côte permet de prendre des relèvements.

64. **Point par deux relèvements du même objet, et la route faite dans l'intervalle** — Soient N_1 et N_2 les positions du navire sur la carte aux

époques t_1 et t_2. On a pris les relèvements du point A à ces époques, on peut donc tracer sur la carte les droites AN_1 et AN_2.

D'autre part on connaît la route vraie R_v, ce qui donne l'orientation de N_1N_2; la vitesse v multipliée par l'intervalle $(t_2 - t_1)$ fait connaître la longueur de N_1N_2. Le triangle AN_1N_2 est donc déterminé en grandeur et position.

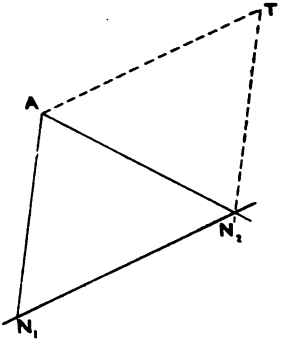


Fig. 13.

Pratiquement on trace par le point A une parallèle AT à la route suivie; sur cette parallèle on prend une longueur AT égale à $v(t_2 - t_1)$, puis on mène par le point T une parallèle TN_2 au premier relèvement AN_1 qu'il est inutile de tracer. L'intersection de TN_2 avec le deuxième relèvement AN_2 détermine la position N_2 à l'époque t_2.

Cette méthode n'est pas précise, car elle ne tient aucun compte des courants, souvent très forts le long des côtes, et ceux-ci ont pour effet d'altérer notablement la longueur et la direction de N_1N_2. On ne devra donc y recourir qu'en cas d'absolue nécessité, et ne considérer le point N_2 que comme une indication.

Il arrive parfois que le point A se masque avant qu'on ait fait une route suffisante pour que le triangle N_1AN_2 soit convenablement déterminé; dans le cas où un autre point remarquable deviendrait visible ensuite, on pourrait appliquer un procédé analogue pour obte-

nir une position ultérieure du navire. Cette méthode est sujette aux mêmes inconvénients que la précédente.

65. **Autres lieux géométriques.** — Les fonds de même profondeur sont répartis sur des lignes de niveau que l'on peut tracer sur la carte; une sonde peut donc donner l'une de ces lignes.

Enfin la hauteur d'un astre fournit aussi un lieu géométrique que l'on peut tracer sur la carte : nous traiterons plus tard cette question importante.

CHAPITRE III

POINT ESTIMÉ
NAVIGATION LOXODROMIQUE ET ORTHODROMIQUE

Navigation loxodromique.

66. Nous avons montré, au chapitre I^er^, comment le navigateur pouvait mesurer la direction et la longueur de la route loxodromique du navire.

Le problème de la navigation loxodromique est double. Il consiste : 1° à déterminer les coordonnées du point d'arrivée, connaissant le point de départ et la route faite; 2° inversement, à déterminer la longueur et la direction de la loxodromie la plus courte joignant deux points donnés.

Nous avons déjà vu, au chapitre II, la résolution graphique de ce problème à l'aide de la carte marine; nous le traiterons ici par le calcul.

67. Dans tout ce qui suit, nous regarderons la Terre comme sphérique. Les moyens de mesure sont en effet trop imparfaits et surtout les causes d'erreur (difficulté

de maintenir le navire en route, courants, etc.) sont trop importantes pour qu'il ne soit absolument illusoire de vouloir introduire dans le calcul une rigueur qui n'apporterait, en définitive, que quelques milles de correction à une longue route toujours fortement altérée.

Nous adopterons l'unité de longueur déjà définie au chapitre I^er^ (n° 20).

68. **Formules de l'estime.** — Soit AB un arc de loxodromie parcouru sur la Terre sous l'angle de route R_v. Appelons (L_1, G_1) les coordonnées du point de départ A, et (L_2, G_2) celles du point d'arrivée B. Posons, algébriquement :

$$l = L_2 - L_1,$$
$$g = G_2 - G_1.$$

La différence l se nomme *changement en latitude* ou *chemin nord-sud; g* est appelé *changement en longitude;* on exprime ces deux quantités en minutes, c'est-à-dire en milles, et elles sont entièrement définies par les équations qui précèdent, à condition de compter les latitudes et les longitudes conformément aux conventions du n° II de l'Introduction. Toutefois, si nous spécifions que la route AB doit être la loxodromie la plus courte entre les points A et B, il y a lieu de faire certaines réserves pour g. Si G_1 et G_2 sont de signes contraires, il peut arriver que $(G_2 - G_1)$ soit, en valeur absolue, supérieur à 180° : en ce cas, il faut prendre pour g le complément à 360° de cette valeur absolue et lui donner le signe contraire à celui de $(G_2 - G_1)$ (n° 30).

Dans les *problèmes de l'estime*, on substitue d'ordinaire aux signes algébriques les noms équivalents. Ainsi, au lieu de $l = +13'$ et $g = -27'$, par exemple, on écrit : $l = 13'$ N. et $g = 27'$ E. ; on préfère cette notation parce qu'elle se rapporte immédiatement à l'angle de route : c'est ainsi que les quantités numériques qui précèdent correspondent à un angle de route N.E. Quant à ce dernier, il n'entre dans les calculs eux-mêmes, au point de vue de ses lignes trigonométriques, que par sa valeur absolue, abstraction faite des signes qu'on lui attribue dans les corrections de routes au compas. Nous désignerons par V la valeur absolue de l'angle de route R_v.

68 *bis*. Ceci posé, soit P l'un des pôles de la Terre. Menons les méridiens extrêmes PAM et PBM' qui déterminent sur l'équateur un arc MM' égal à g.

Considérons sur la loxodromie AB un arc élémentaire $dm = CD$ à la latitude L, et appelons m la longueur totale AB, comptée toujours positive.

Quand on passe du point C (L, G) au point infiniment voisin D ($L + dL$, $G + dG$), on a en *valeur absolue*, dans le triangle rectangle infinitésimal DCN obtenu en traçant le parallèle DN :

$$dL = \cos V\, dm,$$

et, en posant $DN = de$, $e = \Sigma DN$:

$$de = \sin V \,.\, dm,$$

$$de = \operatorname{tg} V\, dL.$$

La somme e, étendue à tout l'arc AB, se nomme le *chemin est-ouest;* on lui donne le nom de g, c'est-à-dire le nom E. ou O' de R_v.

L'angle V étant constant, l'intégration des équations ci-dessus donne immédiatement :

$$(1) \qquad |L_2 - L_1| = l = m \cos V,$$

$$(2) \qquad e = m \sin V,$$

$$(3) \qquad e = l \operatorname{tg} V.$$

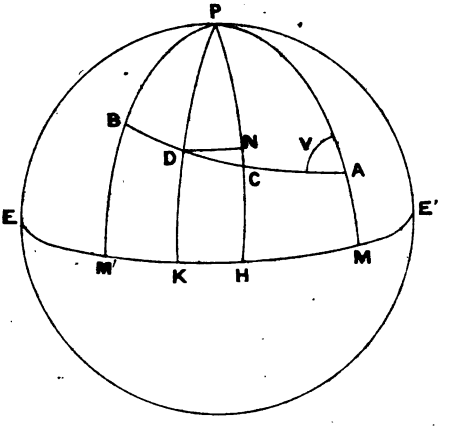


Fig. 14.

D'autre part, on a aussi $HK = DN \operatorname{séc} L$, en prenant le rayon de la terre pour unité, c'est-à-dire :

$$dG = de \operatorname{séc} L.$$

En remplaçant *de* par l'une des valeurs ci-dessus établies, il vient :

$$dG = dL \operatorname{tg} V \operatorname{séc} L,$$

d'où, en intégrant le long de AB :

$$G_2 - G_1 = g = \operatorname{tg} V \int_{L_1}^{L_2} \operatorname{séc} L \, dL,$$

$$g = \operatorname{tg} V \left[\mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_2}{2}\right) - \mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2}\right) \right].$$

Exprimons maintenant g en milles et non plus en parties du rayon terrestre :

$$g = \operatorname{tg} V \frac{1}{\text{arc } 1'} \left[\mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_2}{2}\right) - \mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L_1}{2}\right) \right],$$

ce qui donne, en se reportant à la définition du n° 15 (éq. 4) :

$$(4) \qquad g = (\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{tg} V.$$

69. Les formules (1), (2), (3), (4) sont les formules de l'estime. Toutefois on leur adjoint une cinquième formule[1], approchée, destinée à remplacer la formule (4) pour les moyennes distances, ce qui a l'avantage de dispenser de recourir au calcul ou à la table des latitudes croissantes.

Pour établir cette formule, faisons $\varepsilon = 0$ dans la deuxième des équations (3') du n° 34 ; on a :

$$y = \frac{1}{\text{arc } 1'} \mathcal{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right).$$

Par suite, $y_1 = \lambda_1$ et $y_2 = \lambda_2$.

Nous avons alors, en faisant $\varepsilon = 0$ dans l'équation (11) du n° 42 :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = l \operatorname{séc} L_m + \frac{l^3 \text{ arc}^2 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m,$$

[1] Les formules de l'estime ne donnant que des valeurs absolues, on attribuera à l, e, g calculés les noms déduits de ceux de R_v.

l ayant la même signification que plus haut, et en prenant :

$$L_m = \frac{L_1 + L_2}{2} = L_1 + \frac{l}{2}.$$

En substituant cette valeur de $\lambda_2 - \lambda_1$ dans (4), il vient :

$$(5) \qquad g = l \operatorname{tg} V \operatorname{séc} L_m + \frac{l^3 \operatorname{arc}^2 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m \operatorname{tg} V,$$

c'est-à-dire, à cause des équations (3) et (1) :

$$(6) \qquad g = e \operatorname{séc} L_m + \frac{m^3 \operatorname{arc}^2 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \operatorname{séc}^3 L_m \sin V \cos^2 V.$$

Or la série qui donne $\lambda_2 - \lambda_1$, et par suite g, est rapidement convergente, et le terme du troisième ordre lui-même reste très petit, même quand m dépasse 100'. Ce terme est maximum pour

$$\cos^2 V = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad \sin^2 V = \frac{1}{3},$$

et croît avec L_m. Quand L_m ne dépasse pas 60°, en valeur absolue, il est facile de voir que le terme en m^3 ne peut atteindre 1' que pour

$$m = 370 \text{ milles}.$$

Par suite, dans ces limites, nous écrirons simplement :

$$(7) \qquad g = e \operatorname{séc} L_m.$$

70. **Table de point.** — Pour simplifier le calcul des formules (1), (2), (3) et (7), on a dressé une table,

dite *table de point* (XII, Guyou; IV, Friocourt; IV, Caillet), dans laquelle les arguments sont m et V. On trouve dans la table les quantités l et e, en regard de m, dans la colonne V. Inversement, si l'on a réussi, par tâtonnements, à faire cadrer l et e sur la même ligne d'une colonne V, on trouve du même coup m et V.

Quand il s'agit de la formule (7), c'est-à-dire pour passer de e à g ou inversement, on entre dans la table avec L_m comme angle de route : g se prend dans la colonne m (milles parcourus) et e dans la colonne des chemins nord-sud. Les recueils de Tables de navigation donnent aussi le facteur séc L_m dans une petite table spéciale.

En somme, la table de point donne la résolution d'un triangle rectangle, et elle est particulièrement commode lorsque les données sont l'hypoténuse et un angle aigu. Cette résolution peut encore s'obtenir graphiquement, sans le secours de la carte, à l'aide de la règle, du rapporteur et du double décimètre. Enfin on peut aussi recourir à l'emploi de la nomographie : le petit instrument nommé *quartier de réduction*, très employé par les caboteurs, rentre dans la catégorie des abaques cartésiens; plus simplement encore, il est facile de construire, en vue de ces calculs, un nomogramme à points alignés dont nous avons indiqué le principe [1].

71. **Point estimé.** — Le navire fait diverses routes (m', V'), (m'', V''), ... à partir du point (L_1, G_1), et l'on se

[1] PERRET, 3.

propose de calculer les coordonnées (L_2, G_2) du point d'arrivée.

Soient l', l'', ... les chemins nord-sud et e', e'', les chemins est-ouest partiels.

Par les formules de l'estime on a, en appelant L'_m, L''_m, ... les latitudes moyennes de chacune des routes :

$$l' = m' \cos V', \quad e' = m' \sin V', \quad g' = e' \text{ séc } L'_m,$$
$$l'' = m'' \cos V'', \quad e'' = m'' \sin V'', \quad g'' = e'' \text{ séc } L''_m.$$
. . . . . .

Chacune de ces quantités se calcule ou s'obtient comme on l'a dit au n° 70. On a ensuite, algébriquement (en considérant les noms comme des signes) :

Changement en latitude total,

$$l = l' + l'' + \dots$$

Changement en longitude total,

$$(8) \quad g = g' + g'' + \dots = e' \text{ séc } L'_m + e'' \text{ séc } L''_m + \dots ;$$

d'où, pour le point d'arrivée :

$$L_2 = L_1 + l, \qquad G_2 = G_1 + g.$$

Dans la pratique on simplifie le calcul de g en remplaçant les facteurs séc L'_m, séc L''_m, ... par séc $\frac{L_1 + L_2}{2}$ ou séc L_m. L'erreur ainsi commise sur g est $\Sigma e^i \alpha^i$ en appelant α^i la différence (séc L^i_m — séc L_m) ; comme les α^i sont petits et non tous de même signe, $\Sigma e^i \alpha^i$ est ordinairement négligeable, et la formule (8) devient :

$$g = (e' + e'' + e''' + \dots) \text{ séc } L_m = e \text{ séc } L_m,$$

ce qui abrège notablement le calcul et peut être admis dans le point estimé quotidien.

72. **Exemple numérique.** — Un navire, parti du point $L_1 = 23°,7'$ S., $G_1 = 174°,25'$ E. a fait les routes inscrites dans le tableau ci-dessous. Calculer les coordonnées du point d'arrivée.

ANGLES DE ROUTE	MILLES	CHEMINS N. S.		CHEMINS E. O.	
R_v	m	N.	S.	E.	O.
S. 26° O.	54,8	—	49,2	—	24,0
S. 37 E.	36,2	—	28,9	21,8	—
N. 45 E.	109,8	77,7	—	77,7	—
N. 87 O.	74,6	3,9	—	—	74,5
N. 56 O.	127,0	71,0	—	—	105,3
Sommes . . .		152,6	78,1	99,5	203,8

POINT D'ARRIVÉE

$L_1 = 23°.\ 7',0$ S. $\quad G_1 = 174°.25',0$ E.
$l = 1\ .14\ ,5$ N. $\quad g = 1\ .52\ ,9$ O.
$L_2 = 21\ .52\ ,5$ S. $\quad G_2 = 172\ .32$ E.

$78,1 - 99,5$

$l = 74,5$ N. $\quad e = 104,3$ O.

$L_1 = 23°.\ 7',0$ S.

$\frac{1}{2}\ l = 37\ ,3$ N. $\quad g = e$ séc $L_m = 112',9$ O.

$L_m = 22\ .29\ ,7$ S.

73. **Problème inverse.** — On donne le point de départ (L_1, G_1) et le point d'arrivée (L_2, G_2) ; calculer l'angle de route V et la distance loxodromique m.

On connaît $l = L_2 - L_1$ et $g = G_2 - G_1$. Avec L_1 et L_2 on peut calculer λ_1 et λ_2 et en déduire V par la formule (4) ; on a ensuite m par la formule (1).

Lorsque m n'est pas très grand, c'est-à-dire est inférieur à 300 ou 400 milles, on peut opérer autrement :

calculer $L_m = L_1 + \frac{l}{2}$, puis e par la formule (7); en faisant le quotient des formules (2) et (1), on a ensuite $\text{tg } V = \frac{e}{l}$, puis m par l'une des formules (1) ou (2). Au lieu de calculer ces formules on se sert généralement de la Table de point, en opérant comme il est dit n° 70.

75. **Exemple numérique.** — Calculer l'angle de route et la distance loxodromique entre les points :

Départ $\begin{cases} L_1 = 58°.17' \text{ N.} \\ G_1 = 56°.13' \text{ E.} \end{cases}$ Arrivée $\begin{cases} L_2 = 47°.25' \text{ N.} \\ G_2 = 35°.49' \text{ E.} \end{cases}$

1re Méthode.

$g = G_2 - G_1$	$l = L_2 - L_1$
$G_2 = 35°.49'$ E.	$L_2 = 47°.25'$ N.
$G_1 = 56\ .13$ E.	$L_1 = 58\ .17$ N.
$g = 20\ .24$ O.	$l = 10\ .52$ S.
$g = 1224'$ O.	$l = 652'$ S.

$l_c = \lambda_2 - \lambda_1$	$\text{tg } V = \frac{g}{l_c}$	$m = l \text{ séc } V$
$\lambda_2 = 3239,5$ N.	g 3,0878	l 2,8142
$\lambda_1 = 4326,5$ N.	l_c 3,0362	cos V $\overline{1},8221$
$l_c = 1087',0$ S.	tg V 0,0516	m 2,9921
	$V = 48°.24'$	$m = 982'$.
	$R_v =$ S.48°O.	

2e Méthode. — Bien que la distance soit grande, nous appliquerons la 2e méthode à l'exemple proposé.

$g = G_2 - G_1$ $\quad l = L_2 - L_1$ $\quad L_m = L_1 + \frac{l}{2}$

$G_2 = 35°.49'\,E.$ $\quad L_2 = 47°.25'\,N$ $\quad L_1 = 58°.17'\,N.$

$G_1 = 56\ .13\,E.$ $\quad L_1 = 58\ .17\ N.$ $\quad \frac{1}{2}l = 5\ .26\ S.$

$g = 20\ .24\ O.$ $\quad l = 10\ .52\ S.$ $\quad L_m = 52\ .51\ N.$

$g = 1224'\,O.$ $\quad l = 652'\,S.$

$e = g \cos L_m$ $\quad \operatorname{tg} V = \frac{e}{l}$ $\quad m = e \operatorname{cosec} V$

g	3.088	e	2,869	e	2,869
$\cos L_m$	$\bar{1}$,781	l	.2,814	$\sin V$	$\bar{1}$,875
e	2,869	$\operatorname{tg} V$	0,055	m	2,994

$V = 48°,6$ $\quad m = 986'.$

$R_v = S.49O.$

Remarque. — Dans la 1re méthode nous avons pris 4 décimales aux logarithmes, parce que V doit être connu avec assez de précision quand $g > l_c$, pour que la formule $m = l \sec V$ donne une bonne valeur de m; si même g était très grand par rapport à l_c, il faudrait employer 5 décimales.

La 2e méthode n'est employée que pour de petites valeurs de m, et 3 décimales aux logarithmes suffisent. On peut n'avoir recours qu'à la table de point pour ce problème ; mais les tâtonnements auxquels on est exposé pour arriver à faire cadrer l et e occasionnent généralement, au total, une perte de temps.

75. **Effet du courant.** — En haute mer, le navire ne peut estimer sa route que par rapport à la surface de la mer, qui, lorsqu'elle est en mouvement, l'entraîne ainsi que le loch. Pour obtenir un point estimé exact,

il faut donc ajouter aux routes mesurées la route de la nappe liquide elle-même, et ce serait très simple si son mouvement était connu. Mais on n'a généralement que de vagues indications sur la vitesse et la direction des courants. Lorsque, au contraire, le navigateur a déterminé la vraie position de son navire au moyen d'observations astronomiques, il peut en conclure l'influence du courant : il lui suffit pour cela de calculer la longueur et la direction de l'arc loxodromique allant du point estimé au point observé. En divisant par l'intervalle de temps la longueur trouvée, on obtient la vitesse moyenne du courant; mais ces résultats sont évidemment affectés des erreurs de l'estime.

Navigation orthodromique.

77. Sur la sphère, la route la plus courte entre deux points est l'arc de grand cercle, moindre qu'une demi-circonférence, qui joint ces points. Cet arc de grand cercle a reçu le nom d'*orthodromie*.

L'avantage de l'orthodromie sur la loxodromie n'est pas sensible lorsque la distance à franchir n'est que de quelques centaines de milles; mais il devient très appréciable lorsque cette distance est grande, surtout par de hautes latitudes : il y a donc lieu d'en tirer parti.

Avant d'examiner les problèmes à résoudre pour assurer la navigation orthodromique, nous allons d'abord chercher dans quelles limites on peut substituer sans différence sensible l'arc loxodromique à l'arc orthodromique. A cet effet nous substituerons à V l'azimut loxodromique Z'; en remplaçant dans les formules de l'estime $\sin V$, $\cos V$, $\operatorname{tg} V$ par $\sin Z'$, $-\cos Z'$,

$-\operatorname{tg} Z'$, ces formules s'appliqueront ainsi aux valeurs *algébriques* de l, e, g.

77. **Différence de longueur entre la loxodromie et l'orthodromie pour un petit déplacement sur la sphère.** — Soient les deux points (L_1, G_1), (L_2, G_2) et posons :

$$L_2 = L_1 + l, \quad G_2 = G_1 + g, \quad L_m = \frac{L_1 + L_2}{2},$$

les différences de coordonnées l et g étant de petites quantités.

Appelons m et M les longueurs respectives des arcs loxodromique et orthodromique joignant les deux points.

Par les équations (1) et (2) du n° 68, on a :

$$m^2 = l^2 + e^2, \tag{9}$$

et, en multipliant par $\cos L_m$ les deux membres de (6) :

$$g \cos L_m = e + \frac{m^3 \operatorname{arc}^2 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \sec^2 L_m \sin Z' \cos^2 Z' + \dots ;$$

d'où :

$$e = g \cos L_m - \frac{m^3 \operatorname{arc}^2 1'}{24} (1 + \sin^2 L_m) \sec^2 L_m \sin Z' \cos^2 Z'.$$

Par suite, en conservant seulement les termes du quatrième ordre :

$$e^2 = g^2 \cos^2 L_m - \frac{g m^3 \operatorname{arc}^2 1'}{12} (1 + \sin^2 L_m) \sec L_m \sin Z' \cos^2 Z'.$$

A la même approximation, nous pouvons remplacer dans le terme du quatrième ordre g par

$-l \operatorname{tg} Z'$ séc L^m, d'après (5); ou, ce qui revient au même d'après (2), par $m \sin Z'$ séc L_m. Il vient alors :

$$e^2 = g^2 \cos^2 L_m - \frac{m^4 \operatorname{arc}^2 1'}{12}(1 + \sin^2 L_m) \sec^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z'.$$

En remplaçant dans (9), on a :

(10) $$m^2 = l^2 + g^2 \cos^2 L_m - \frac{m^4 \operatorname{arc}^2 1'}{12}(1 + \sin^2 L_m) \sec^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z'.$$

Prenons maintenant l'arc de grand cercle. P étant le pôle nord, on a :

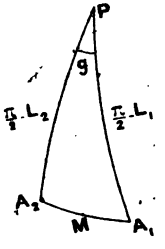


Fig. 15.

$$\cos M = \sin L_1 \sin (L_1 + l) + \cos L_1 \cos (L_1 + l) \cos g;$$

d'où l'on tire facilement :

$$\sin^2 \frac{M}{2} = \sin^2 \frac{l}{2} + \cos L_1 \cos (L_1 + l) \sin^2 \frac{g}{2}.$$

Or on sait que l'on a :

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^6}{1440} - \dots$$

On a donc, en négligeant les termes d'ordre supérieur au quatrième :

$$\frac{M^2}{4} - \frac{M^4}{48} = \frac{l^2}{4} - \frac{l^4}{48} + \cos L_1 \cos (L_1 + l) \left[\frac{g^2}{4} - \frac{g^4}{48}\right];$$

d'où $$M^2 = l^2 + g^2 \cos L_1 \cos (L_1 + l) + \frac{M^4}{12} - \frac{l^4}{12} - \frac{g^4}{12} \cos L_1 \cos (L_1 + l).$$

Mais on a :

$$2\cos(L_1+l)\cos L_1 = \cos(2L_1+l)+\cos l$$
$$= \cos 2L_m + \cos l = 2\cos^2 L_m - 1 + \cos l;$$
$$\cos(L_1+l)\cos L_1 = \cos^2 L_m - \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^4}{24} + \dots\right).$$

Par suite, en remplaçant et négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au quatrième :

$$M^2 = l^2 + g^2\cos^2 L_m - \frac{g^2l^2}{4} + \frac{M^4}{12} - \frac{l^4}{12} - \frac{g^4}{12}\cos^2 L_m.$$

Tous ces arcs sont exprimés en radiants; prenons pour unité la minute. Il vient, après réduction :

$$M^2 = l^2 + g^2\cos^2 L_m - \text{arc}^2\,1'\left[\frac{g^2l^2}{4} - \frac{M^4}{12} + \frac{l^4}{12} + \frac{g^4}{12}\cos^2 L_m\right].$$

Nous pouvons maintenant comparer cette expression à l'équation (10). En retranchant membre à membre et en divisant ensuite par $(m+M)$, on a :

$$m - M = \text{arc}^2\,1'\left[\frac{g^2l^2}{4(M+m)} - \frac{m^4}{12(M+m)}(1+\sin^2 L_m)\sec^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - \frac{M^4 - l^4 - g^4\cos^2 L_m}{12(M+m)}\right].$$

On voit ainsi que la différence $(m-M)$, très petite, est du troisième ordre. Pour en avoir une valeur approchée, faisons $m = M$ dans le deuxième membre, et

d'autre part remplaçons g par $m \sin Z' \text{ séc } L_m$, l par $-m \cos Z'$. On a :

$$m - M = \text{arc}^2\, 1' \left[\frac{m^3 \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z'}{8} - \frac{m^3}{24}(1 + \sin^2 L_m) \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - \frac{m^3 - m^3 \cos^4 Z' - m^3 \sin^4 Z' \text{ séc}^2 L_m}{24} \right],$$

$$m - M = \frac{m^3 \text{arc}^2\, 1'}{24} \left[3 \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - (1 + \sin^2 L_m) \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - (1 - \cos^4 Z' - \sin^4 Z' \text{ séc}^2 L_m) \right],$$

$$m - M = \frac{m^3 \text{arc}^2\, 1'}{24} \left[2 \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - \sin^2 L_m \text{ séc}^2 L_m \sin^2 Z' \cos^2 Z' - (2 \sin^2 Z' - \sin^4 Z' - \sin^4 Z' \text{ séc}^2 L_m) \right].$$

Ce qui donne, après des réductions faciles :

$$(11) \qquad m - M = \frac{m^3 \text{arc}^2\, 1'}{24} \sin^2 Z' \text{ tg}^2 L_m.$$

Cette différence est maximum pour $\sin Z' = \pm 1$, et acquiert alors les valeurs suivantes :

L_m	$m = 120'$	$m = 600'$
$\pm 60°$	0',02	2',3
70	0,05	5,8
80	0,20	24,5
85	0,80	99,5.

78. On conclut de ce tableau : 1° que la différence $(m - M)$ est inappréciable, par toutes les latitudes, tant que m reste inférieure à 120 milles; 2° que jusqu'aux latitudes de 70° au moins on peut, au lieu de suivre l'orthodromie elle-même, lui substituer un polygone loxodromique inscrit dont les côtés sont inférieurs à 600 milles ou 10°.

79. **Calcul de la distance orthodromique entre deux points éloignés.** — C'est la question que l'on doit résoudre tout d'abord, afin de décider si la différence de longueur entre la loxodromie et l'orthodromie justifie vraiment l'emploi de cette dernière.

Soient $A_1(L_1, G_1)$ et $A_n(L_n, G_n)$ les lieux donnés sur la Terre et P le pôle nord. Traçons l'orthodromie A_1A_n et proposons-nous d'en calculer la longueur

$$A_1A_n = M.$$

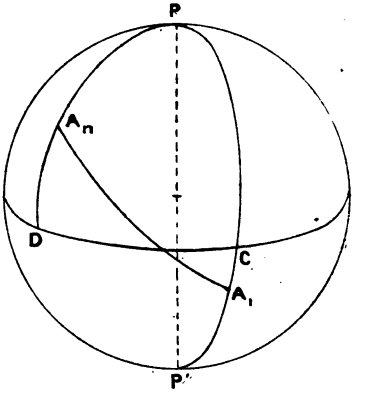


Fig. 16.

Dans le triangle sphérique A_1PA_n on peut écrire :

$$\cos M = \cos PA_1 \cos PA_n + \sin PA_1 \sin PA_n \cos P.$$

Mais on a toujours, algébriquement :

$$PA_1 = \frac{\pi}{2} - L_1, \qquad PA_n = \frac{\pi}{2} - L_n.$$

D'autre part, posons, algébriquement aussi :

$$(12) \qquad g = G_n - G_1.$$

g est ainsi l'arc d'équateur CD qui va du méridien de départ G_1 au méridien G_n, affecté du signe + ou du signe — selon que D est dans l'ouest ou dans l'est de C. C'est le changement en longitude, déjà défini au n° 68 pour la loxodromie, et avec la même restriction relative au cas dans lequel, G_1 et G_n étant de signes contraires, leur différence $(G_n - G_1)$ est, en valeur absolue, supérieure à 180° ; on prend alors

$$|g| = 2\pi - |G_n - G_1|,$$

en adoptant le signe contraire à celui de $(G_n - G_1)$. De cette manière l'arc A_1A_n est toujours inférieur à π, c'est-à-dire est bien l'orthodromie à suivre, et la valeur absolue de g est l'angle P du triangle que nous envisageons.

Cela posé, il vient, par substitution dans la formule ci-dessus :

$$(13) \qquad \cos M = \sin L_1 \sin L_n + \cos L_1 \cos L_n \cos g,$$

et cette formule, entièrement générale, résout le problème.

80. **Calcul de l'azimut initial de l'orthodromie.** — Le point A_1 étant le point de départ, nous désignerons par Z_1 l'azimut $P'A_1A_n$ du premier élément de la route, et nous compterons cet azimut à la manière habituelle, c'est-à-dire de 0 à 2π à partir du sud dans le sens rétrograde.

Appliquons la formule des quatre éléments consécu-

tifs aux éléments $\widehat{A}_1$, PA_1, $\widehat{P}$ et PA_n du triangle déjà considéré. On a :

$$\cos PA_1 \cos P = \operatorname{cotg} PA_n \sin PA_1 - \operatorname{cotg} A_1 \sin P,$$

ce qui donne, en remarquant que $\widehat{A}_1 = \pi - Z_1$:

$$\sin L_1 \cos g = tg\, L_n \cos L_1 + \operatorname{cotg} Z_1 \sin g,$$

d'où :

$$\operatorname{cotg} Z_1 \sin g = \sin L_1 \cos g - \cos L_1 \operatorname{tg} L_n. \quad (14)$$

Si l'on remarque que Z_1 est inférieur ou supérieur à π selon que g est positif ou négatif, cette formule, qui est générale, fait connaître Z_1 sans ambiguïté.

81. **Équation du grand cercle.** — Tout grand cercle rencontre l'équateur en deux points diamétralement opposés. Nous appelons G_0 la longitude de celle de ces intersections qui est *occidentale*. Ainsi G_0 est, par définition, essentiellement positive et moindre que π. D'autre part, nous appelons θ l'angle formé au point de longitude G_0 par la direction ouest de l'équateur avec la direction ascendante (nord) du grand cercle. Il suit de là que θ est aussi un angle essentiellement positif et moindre que π.

Soit A (L,G) un point quelconque du grand cercle. Dans le triangle ACB, on a :

$$\operatorname{tg} L = \operatorname{tg} \theta \sin (G - G_0), \quad (15)$$

et cette relation est entièrement générale, $(G - G_0)$ étant d'ailleurs compris entre -2π et $+\pi$.

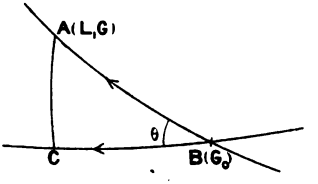


Fig. 17.

82. **Calcul des paramètres du grand cercle.** — Pour calculer G_0 et θ, reportons-nous à la figure du n° 81, et prenons pour point A le point initial A_1 (L_1, G_1) de l'orthodromie. Dans le triangle rectangle A_1CB, on a : $\operatorname{tg} BC = \sin A_1C \operatorname{tg} CA_1B$.

Appelons γ le changement en longitude à effectuer pour aller du point $B(G_0)$ au point A_1, arc défini comme au n° 68, c'est-à-dire compris entre — 180° et + 180°. En remplaçant BC par γ et CA_1B en fonction de l'azimut initial Z_1, il vient

$$(16) \qquad \operatorname{tg} \gamma = - \sin L_1 \operatorname{tg} Z_1,$$

formule générale, quelle que soit la position du point A_1.

Cette formule donne pour γ deux valeurs supplémentaires et de signes contraires. Soit γ_1 la valeur positive; on aura pour G_0 les deux valeurs

$$(17) \quad G'_0 = G_1 - \gamma_1 \quad \text{et} \quad G''_0 = G_1 + \pi - \gamma_1.$$

L'une d'elles convient au point $B(G_0)$, l'autre est la longitude de la 2e intersection. Il est donc bien facile de choisir entre elles, d'après la définition de G_0; si les deux valeurs sont négatives, il faut évidemment adopter la plus grande valeur absolue et la retrancher de 2π.

83. G_0 étant connu, l'équation (15) mise sous la forme

$$(18) \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} L \operatorname{cosec} (G - G_0),$$

et appliquée à l'un des deux points A_1 ou A_n, initial ou final, permet de calculer θ, qui est ainsi obtenu sans ambiguïté. On emploiera de préférence celui des points pour lequel $\operatorname{cosec} (G - G_0)$ est la plus petite, conformément aux principes du calcul logarithmique.

84. **Tracer l'orthodromie sur la carte marine.** — Avant de faire le calcul nécessaire au tracé, il est bon de s'assurer que l'orthodromie ne passe point par des latitudes trop élevées, dangereuses à cause des glaces ou des mauvais temps fréquents. A cet effet on calcule les coordonnées des *vertex*, points du grand cercle pour lesquels la latitude est maximum ou mininum. Ce sont les points

$$L_v = \pm\theta, \quad G_v = G_0 \pm \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \theta < \frac{\pi}{2};$$

$$L_v = \pm(\pi - \theta), \quad G_v = G_0 \mp \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad \theta > \frac{\pi}{2}.$$

Si le vertex est acceptable, on donne à G une série de valeurs variant par échelons égaux, depuis G_1 jusqu'à G_n, dans le sens de la plus courte distance, et l'on calcule les latitudes correspondantes par la formule (15). Il ne reste plus qu'à porter sur la carte les points ainsi calculés, ce qui permet de se rendre compte définitivement si l'orthodromie peut être suivie sans danger pour la navigation.

85. D'après le n° 78, d'un jour au lendemain on peut conserver le même angle de route, car il faudrait filer 25 nœuds pour franchir 600 milles en 24 heures.

Le navire est généralement entraîné en dehors de la route qu'il veut suivre; lorsque le point astronomique montre qu'il en a été ainsi, il ne faut naturellement pas chercher à rallier l'arc de grand cercle tracé sur la carte, mais calculer le nouvel azimut initial à prendre pour suivre le premier élément de l'orthodromie con-

duisant du point actuel au point d'arrivée. C'est ce que l'on doit faire chaque jour.

86. **Exemple numérique.** — Comme application, proposons-nous de tracer l'orthodromie allant de Port-Natal (Afrique) à la pointe Nepean (Port-Philipp, Australie).

$$\text{Port-Natal} \begin{cases} L_1 = - \ 29°.53' \\ G_1 = - \ 28.44. \end{cases}$$

$$\text{Pointe Nepean} \begin{cases} L_n = - \ 38°.18' \\ G_n = - \ 142.18. \end{cases}$$

La distance loxodromique de ces deux points est 5655 milles. Voyons d'abord la grandeur de l'économie de route à réaliser par l'orthodromie.

Prenons les formules (13) et (14) :

(Voir le calcul p. 93).

L'avantage de l'orthodromie est grand. L'azimut du premier élément de la route étant 313°.57′, l'angle de route initial sera S.46E.

Pour calculer les paramètres du grand cercle, appliquons l'équation (16) au point initial :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma &= - \sin L_1 \operatorname{tg} Z_1 \\ - \sin L_1 & \quad \bar{1},6974 \\ \operatorname{tg} Z_1 & \quad 0,0158n \\ \hline \operatorname{tg}\gamma & \quad \bar{1},7132n \end{aligned}$$

d'où $\gamma_1 = 152°.41'$.

Nous avons alors, par les équations (17) :

$$G'_0 = - 28°.44' - 152°.41' = - 181°.25',$$

et par suite $G_0 = + 178°.35'$.

$G_n = -142\ .18'$
$G_1 = -\ 28\ .44$
$G_n - G_1 = -113\ .34$

$\cos M = \sin L_1 \sin L_n + \cos L_1 \cos L_n \cos g$

$L_1 = -\ 29\ .53'\ \sin \bar{1},6974\,n\ \cos \bar{1},9380$
$L_n = -\ 38\ .18\ \sin \bar{1},7922\,n\ \cos \bar{1},8947$
$g = -113\ .34\ \cos \bar{1},6019\,n$

$a\ \bar{1},4896 \qquad \bar{1},4346\,n$
$b\ \bar{1},4346\,n$

$\text{arg}^t\ \Delta\ 0,0550$
$\text{l.}\ \Delta\ 0,9246$

$\cos M\ \bar{2},5650$
$M = 87°.54' = 5274$ milles.
$m \qquad = 5655\ -$
Différence $\qquad 381$ milles.

$\cotg Z_1 \sin g = \sin L_1 \cos g - \cos L_1 \text{ tg } L_n.$

$\sin \bar{1},6974\,n \quad \cos \bar{1},9380$
$\text{tg } 1,8975\,n$
$\cos \bar{1},6019\,n$

$\bar{1},2993 \qquad a\ \bar{1},8355\,n$
$b\ \bar{1},2993$

$\text{arg}^t\ \Sigma\ 0,5362$
$\text{l.}\ \Sigma\ 0,1109$

$\cotg Z_1\ \sin g\ \bar{1},9464$
$\sin g\ \bar{1},9622\,n$
$\cotg Z_1\ \bar{1},9842\,n$
$Z_1 = 313°.57'.$

Nous aurons l'inclinaison θ par la formule (18) appliquée au point d'arrivée :

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg} L_n \operatorname{cosec}(G_n - G_0),$$

$G_n = -142°.18'$	$\operatorname{tg} L_n$ $\bar{1},8975n$
$G_0 = +178\ .35$	$\sin(G_n - G_0)$ $\bar{1},8000$
$G_n - G_0 = -320\ .53$	$\operatorname{tg}\theta$ $0,0975n$
	$\theta = 128°.37'.$

Le vertex qui nous intéresse est, d'après les formules (19), deuxième ligne :

$$L_v = -51°.23', \quad G_v = +268°.35' = -91°.25',$$

et il nous reste maintenant à calculer un certain nombre de points de l'orthodromie. A cet effet, prenons pour échelon de G la valeur $-10°$, puisqu'il nous faut marcher dans l'est. Nous aurons

$$\operatorname{tg} L_i = \operatorname{tg}\theta \sin(G_i - G_0).$$

i	G_i	$G_i - G_0$	$\sin(G_i - G_0)$	$\operatorname{tg} L_i$	L_i
1	— 28°.44′	— 207°.19′	»	»	— 29°.53′
2	— 38 .44	— 217 .19	$\bar{1},7826$	$\bar{1},8801\,n$	— 37 .11
3	— 48 .44	— 227 .19	$\bar{1},8664$	$\bar{1},9639\,n$	— 42 .37
4	— 58 .44	— 237 .19	$\bar{1},9251$	$0,0226\,n$	— 46 .29
5	— 68 .44	— 247 .19	$\bar{1},9650$	$0,0625\,n$	— 49 . 7
6	— 78 .44	— 257 .19	$\bar{1},9893$	$0,0868\,n$	— 50 .41
7	— 88 .44	— 267 .19	$\bar{1},9995$	$0,0970\,n$	— 51 .21
8	— 98 .44	— 277 .19	$\bar{1},9964$	$0,0939\,n$	— 51 . 9
9	— 108 .44	— 287 .19	$\bar{1},9799$	$0,0774\,n$	— 50 . 5
10	— 118 .44	— 297 .19	$\bar{1},9486$	$0,0461\,n$	— 48 . 2
11	— 128 .44	— 307 .19	$\bar{1},9005$	$\bar{1},9980\,n$	— 44 .52
12	— 138 .44	— 317 .19	$\bar{1},8312$	$\bar{1},9287\,n$	— 40 .19

Ces points suffisent au tracé de l'orthodromie sur la carte marine.

87. Nous avons employé quatre décimales pour le

calcul de Z_1 parce que cet angle devait nous servir à déterminer G_0 et θ. Il est clair que dans la pratique journalière envisagée au n° 85 il suffirait largement de trois décimales, l'angle de route étant suffisamment bien déterminé à o°,5 près.

88. **Navigation mixte.** — Dans le cas où l'on ne veut pas dépasser un parallèle donné, soit à cause des glaces, soit à cause des vents contraires que l'on serait exposé à rencontrer en s'approchant davantage du pôle, on peut néanmoins suivre une trajectoire plus courte que la loxodromie. A cet effet on suit d'abord un arc de grand cercle issu du point de départ et mené tangentiellement au parallèle donné. Ce parallèle atteint, on s'y maintient jusqu'à ce que l'on rencontre l'arc de grand cercle qui lui est tangent et qui va passer par le point d'arrivée.

89. Pour déterminer l'arc de grand cercle qui, partant du point (L_1, G_1), vient tangenter le parallèle limite L_v, appelons G' la longitude du point de tangence A', et soit P le pôle nord. Dans le triangle rectangle $PA'A_1$ on a :

$$\cos(G' - G_1) = \operatorname{cotg} L_v \operatorname{tg} L_1.$$

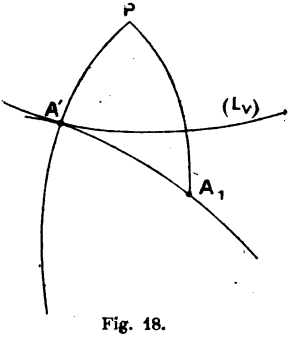


Fig. 18.

Si $|L_v| < |L_1|$ il n'y a pas de solution, $(G' - G_1)$ étant imaginaire. Si le problème est possible, l'angle $(G' - G_1)$ étant en valeur absolue inférieur à $|G_n - G_1|$

et par suite à π, et de même signe que cette différence, est déterminé sans ambiguïté, en grandeur et en signe, par la formule précédente. On en conclut facilement G'.

Les paramètres du grand cercle s'obtiendront ensuite comme il suit.

De G' on déduira G_0 par la formule

$$G_0 = G' \pm \frac{\pi}{2},$$

le signe étant choisi de manière à ce que G_0 soit positif et inférieur à π (en ajoutant au besoin 2π). On formera ensuite, algébriquement, la quantité $(G' - G_0)$ pour examiner si cette différence est

$$+\frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2};$$

puis l'équation (15) appliquée au point A' :

$$\operatorname{tg} L_v = \operatorname{tg} \theta \sin (G' - G_0),$$

fera connaître le signe de $\operatorname{tg} \theta$, ce qui permet de décider entre les valeurs

$$\theta = |L_v| \quad \text{ou} \quad \theta = \pi - |L_v|.$$

Connaissant désormais G_0 et θ, l'équation (15) permet, comme nous l'avons vu au n° 86, de tracer le grand cercle par points.

9o. On détermine de la même manière le grand cercle qui, partant du point d'arrivée A_n, vient tangenter le parallèle L_v du côté de A_1.

91. **Procédés simplifiés.** — Au lieu d'employer les logarithmes pour exécuter le calcul des formules de la navigation orthodromique, on peut se servir des Tables de l'amiral Perrin, qui permettent d'opérer plus

rapidement et avec une exactitude bien suffisante pour les besoins de la pratique.

On peut aussi déterminer très rapidement l'azimut (ou l'angle de route) initial au moyen du *nomogramme des azimuts*, ce qui est particulièrement commode après le point observé quotidien (n° 85).

92. Graphiquement, on obtenait autrefois l'azimut initial de l'orthodromie à l'aide du double planisphère de l'ingénieur hydrographe Keller.

Les cartes spéciales de M. Hilleret, qui rectifient les orthodromies, permettent la résolution graphique des divers problèmes de la navigation par arc de grand cercle.

On peut enfin opérer directement sur la sphère, en utilisant le globe du *navisphère*[1], instrument construit surtout en vue de la préparation des observations de nuit à la mer.

[1] Le premier modèle de navisphère, dû au commandant DE MAGNAC, a été longtemps réglementaire. Le Service hydrographique a adopté, il y a quelques années, un nouveau modèle présenté par l'amiral PERRIN.

M401

LIVRE II

NAVIGATION ASTRONOMIQUE

CHAPITRE I

CONNAISSANCE DES TEMPS

Éléments usuels.

93. Les éléments astronomiques nécessaires aux astronomes et aux navigateurs sont publiés deux ans à l'avance par le Bureau des longitudes sous la forme d'un recueil annuel qui porte le titre de *Connaissance des Temps*.

Les seuls astres utilisables en navigation sont le Soleil et la Lune, les quatre planètes Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et enfin les étoiles brillantes, c'est-à-dire de grandeur supérieure à la troisième.

La C. des T. donne les éléments variables des astres pour certaines époques relatives au temps du méridien de l'Observatoire de Paris, généralement le midi moyen de chaque jour. Pour les époques intermédiaires, on calcule les éléments par interpolation.

94. Il nous paraît inutile de donner ici une énumération, même succincte, des éléments fournis par la C. des T., l'ouvrage étant admirablement disposé et renfermant d'ailleurs toutes les explications nécessaires. Nous préviendrons toutefois que les quantités que nous désignons par E_v (équation du temps vrai) et par E_m (équation du temps moyen) sont données dans les éphémérides du Soleil sous les noms respectifs suivants :

Angle horaire du Soleil moyen, ou temps moyen à Midi vrai (pages de gauche).

Angle horaire du Soleil vrai, ou temps vrai à Midi moyen (pages de droite).

Enfin l'ascension droite du Soleil moyen, $Æm$, est donnée dans les pages de droite des mêmes éphémérides, sous le nom de *Temps sidéral à Midi moyen.*

95. **Interpolation dans la Connaissance des Temps.** — Désignons par E un élément astronomique quelconque, variable avec le temps, et posons

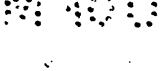
$$E = f(T),$$

le signe f indiquant une fonction continue et T étant le temps de Paris.

La Connaissance des Temps donne la suite des valeurs E_0, E_1, E_2, ... correspondantes aux époques T_0, T_1, T_2, ... variant en progression arithmétique.

Le problème de l'interpolation consiste à calculer la valeur de E pour une époque intermédiaire T quelconque, en se servant simplement des valeurs numériques données.

Il convient de distinguer deux cas.



1° La Connaissance des Temps fait connaître, pour chaque époque, la variation de E dans l'unité de temps.

La variation ainsi donnée est une vitesse; c'est la dérivée première $f'(T)$. Par suite, si nous posons

$$E = E_0 + \delta E_0, \qquad T = T_0 + \tau,$$

nous aurons, par la série de Taylor :

$$(1) \quad \delta E_0 = \tau f'(T_0) + \frac{\tau^2}{2} f''(T_0) + \frac{\tau^3}{6} f'''(T_0 + \theta\tau).$$

Appelons μ la valeur absolue maximum de $f'''(T)$.

Dans la formule (1) τ doit être évidemment exprimé avec l'unité adoptée pour le calcul des dérivées, et cette dernière est une partie aliquote de l'intervalle constant $(T_1 - T_0) = (T_2 - T_1) = \ldots$

D'ailleurs, l'échelon de temps est choisi assez petit pour que le produit $\frac{(T_1 - T_0)^3}{6}\mu$ soit négligeable. C'est ainsi, par exemple, que les coordonnées du Soleil sont données de jour en jour et celles de la Lune, qui varient rapidement, d'heure en heure. Il suit de là que le reste de la série (1) est toujours négligeable, et l'on peut écrire simplement :

$$(2) \qquad \delta E_0 = \tau f'(T_0) + \frac{\tau^2}{2} f''(T_0).$$

$f''(T_0)$ n'est pas donnée, mais peut se calculer aisément. On a en effet :

$$f'(T_0 + \tau) - f'(T_0) = \tau f''(T_0) + \frac{\tau^2}{2} f'''(T_0 + \theta'\tau).$$

Le reste de cette série est toujours inférieur, en va-

leur absolue, à $\frac{\tau^2}{2}\mu$, et ce dernier croît constamment de $\tau = 0$ à $\tau = T_1 - T_0$; or $\frac{\tau^3}{6}\mu$ (dont la plus grande valeur $\frac{(T_1 - T_0)^3}{6}\mu$ est négligeable) est constamment supérieur à $\frac{\tau^2}{2}\mu$ à partir de $\tau = 3$: on peut donc négliger ce reste. Cette conclusion ne serait pas certaine si $(T_1 - T_0)$ n'atteignait pas la valeur 3, mais ce cas ne se présente jamais. Par suite nous pouvons écrire, en résolvant par rapport à $f''(T_0)$:

$$f''(T_0) = \frac{f'(T_0 + \tau) - f'(T_0)}{\tau},$$

et, en faisant $\tau = T_1 - T_0$:

$$f''(T_0) = \frac{f'(T_1) - f'(T_0)}{T_1 - T_0}.$$

La formule (2) devient alors

$$(3) \quad \delta E_0 = \tau\left[f'(T_0) + \frac{\tau}{2}\frac{f'(T_1) - f'(T_0)}{T_1 - T_0}\right].$$

C'est la formule recommandée par la Connaissance des Temps dans le cas où l'on veut obtenir δE_0 avec la dernière précision ; en navigation il est rarement nécessaire de calculer avec cette rigueur, sauf parfois pour le réglage des chronomètres, et il suffit généralement de conserver seulement le terme du premier ordre, ce qui donne :

$$(4) \quad \delta E_0 = \tau f'(T_0).$$

Toutefois, pour atténuer l'influence du terme négligé, il convient de prendre pour époque initiale T_0 celle qui se rapproche le plus de T, et par suite τ peut être négatif.

2° La Connaissance des Temps ne donne pas la dérivée première $f'(T)$.

Dans ce cas, on formera les différences successives

$$\Delta E_0 = E_1 - E_0 \quad \Delta E_1 = E_2 - E_1 \ldots$$
$$\Delta^2 E_0 = \Delta E_1 - \Delta E_0, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'on aura recours à la formule d'interpolation bien connue :

(5)
$$\delta E_0 = \frac{\tau}{T_1 - T_0} \Delta E_0 + \frac{\tau}{T_1 - T_0} \cdot \frac{\tau - (T_1 - T_0)}{2(T_1 - T_0)} \Delta^2 E_0 + \ldots$$

dans laquelle il suffira d'ailleurs de conserver le terme du premier ordre :

(6)
$$\delta E_0 = \frac{\tau}{T_1 - T_0} \Delta E_0.$$

Les calculs d'interpolation se réduiront donc, dans tous les cas, à de simples calculs de parties proportionnelles.

96. **Remarque.** — On peut évidemment se proposer le problème inverse, savoir le calcul de T connaissant E. Les formules (4) et (6) feraient connaître τ, ou tout au moins en donneraient une valeur approchée, permettant le calcul du terme du deuxième ordre dans le cas où, celui-ci n'étant pas négligeable, une deuxième approximation serait nécessaire.

Le problème inverse ne se présente plus, en Navigation, depuis la suppression du tableau relatif aux distances lunaires.

97. **Précision des données de la Connaissance des Temps.** — Les ascensions droites des astres sont données au demi-centième de seconde de temps près, et les déclinaisons au demi-dixième de seconde d'arc. Toutefois les meilleurs catalogues d'étoiles fondamentales ne comportent pas encore tout à fait un pareil degré de précision.

Pour le Soleil, les Tables ne peuvent prétendre représenter les observations qu'à 2″ près environ, et, dans le cas des planètes, on ne peut répondre que de 5 à 6″ (Faye).

Les Tables lunaires sont très inexactes, à tel point qu'on est obligé de faire usage, même en Navigation, des corrections dites de *Newcomb*, données dans un tableau spécial placé à la fin du volume. Ces corrections elles-mêmes laissent à désirer, au moins pour certaines déterminations, comme par exemple celle de la longitude par les Occultations.

98. **Expression des données pour les calculs.** — A la mer, dans les calculs de position, on doit conserver en principe le chiffre des dixièmes de minute d'arc et celui des unités de seconde de temps pour exprimer les données du calcul logarithmique.

A terre, pour les calculs d'heure par des hauteurs prises à l'horizon artificiel, on peut arrondir les données à la seconde d'arc la plus voisine.

De cette manière, l'erreur de calcul provenant de

l'altération volontaire des données est toujours petite devant celle due à l'imperfection des mesures et n'a pas d'influence sensible sur le résultat.

Conversion des temps simultanés.

99. Le problème général est le suivant.

Étant donné l'angle horaire T*ag* d'un astre dans le lieu de longitude G, calculer l'angle horaire T*a'g'* d'un autre astre dans le lieu de longitude G'.

Nous envisagerons d'abord les deux cas particuliers suivants :

1° On change le lieu sans changer l'astre;

2° On change l'astre sans changer le lieu.

Changement de lieu.

100. Considérons la face nord de l'équateur terrestre, et soit dans ce plan une circonférence de rayon 1 ayant pour centre o celui de la Terre.

Représentons par POP' la trace du premier méridien, le rayon OP étant celle du méridien supérieur. Le point P est alors l'origine des longitudes.

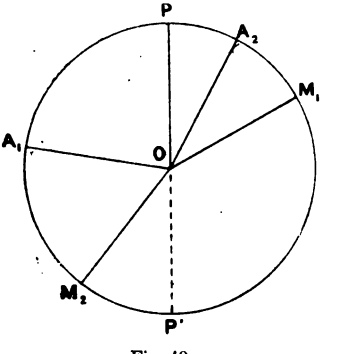


Fig. 19.

Nous représenterons de la même manière la trace du méridien supérieur d'un lieu et celle du cercle

horaire d'un astre par un rayon mené du côté de la projection du lieu ou de l'astre.

Soient d'abord un méridien OM_1 situé par une longitude Ouest $G_1 = + PM_1$ et un cercle horaire OA_1 tel que $PM_1A_1 > PM_1$.

On a sur la figure

$$PP'A_1 = M_1P'A_1 + PM_1,$$

c'est-à-dire $$Tap = Tag + G_1.$$

Si le cercle horaire est dans une position OA_2 telle que $PA_2 < PA_2M_1$, on a :

$$PA_2 = PA_2M_1 - M_1A_2 = PA_2M_1 - (24^h - M_1P'A_2),$$

ou $$Tap = G_1 - 24^h + Tag.$$

Soit maintenant un méridien OM_2 situé par une longitude Est $G_2 = - PA_1M_2$.

Le cercle horaire de l'astre a étant dans la première position OA_1 définie comme plus haut, mais relativement à P et à M_2, on a :

$$PP'A_1 = M_2A_1 + PP'M_2 = M_2A_1 + 24^h - PA_1M_2,$$

ou $$Tap = Tag + 24^h + G_2.$$

Dans la deuxième position OA_2 du cercle horaire on a :

$$PA_2 = M_2PA_2 - PA_1M_2,$$

ou $$Tap = Tag + G_2.$$

Ces cas sont les seuls possibles. On voit ainsi qu'à 24 heures près on peut écrire la relation

(7) $$Tap = Tag + G,$$

quelles que soient les positions respectives des méridiens et du cercle horaire. Chacune des trois quan-

tités étant définie d'une manière précise, il suffira, lorsque l'application de la formule (7) conduira à un résultat en désaccord avec la définition, d'ajouter ou de retrancher 24 heures à ce résultat pour en obtenir la vraie valeur.

Exemple : Soient $Tap = 2^h.17^m$ et $Tag = 23^h.30^m$. On demande G.

La formule (7) donne :

$$G = 2^h.17^m - 23^h.30^m = -21^h.13^m.$$

G devant être en valeur absolue inférieure à 12 heures et la formule n'étant exacte qu'à 24 heures près, nous devons ajouter 24 heures au résultat trouvé, et il vient :

$$G = +2^h.47^m.$$

101. La formule (7) résoud le problème de la transformation de l'angle horaire pour les différents lieux. Si l'on donne Tag et que l'on demande Tag', on a en effet

$$Tap = Tag + G,$$

puis :

$$Tag' = Tap - G'.$$

On peut éliminer Tap, et l'on obtient

$$Tag' = Tag + G - G'.$$

Quand G est positif et G' négatif, cette élimination de Tap apporte une petite simplification au calcul de Tag'; il en est de même lorsque les calculs de l'estime ont fait connaître, au préalable, le changement en longitude $g = G' - G$.

102. **Convention relative aux dates**[1]. — Adoptant comme époque initiale l'instant d'un certain

[1] Guyou et Willotte, 2, p. 200.

passage du Soleil au méridien G, on sait qu'une époque ultérieure peut être précisée par l'indication de l'angle décrit depuis l'origine du temps par le cercle horaire du Soleil, relativement à ce méridien.

Cette indication peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{T}vg = n \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vg,$$

le premier membre désignant la quantité dont s'est accrû l'angle horaire du Soleil, et $\mathrm{H}vg$ étant l'angle horaire proprement dit.

n, nombre de passages depuis le passage initial, se nomme la date. Pour la commodité de l'usage, le terme $n \times 24^{\mathrm{h}}$ se décompose en années, mois et jours ; mais nous n'avons pas à nous en préoccuper ici.

Conservant ces notations, nous aurons, pour l'expression de l'*angle horaire généralisé* du Soleil à Paris, à l'instant $\mathrm{T}vg$:

$$\mathrm{T}vp = n_0 \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vp.$$

On est convenu de prendre pour date n du lieu G correspondant à la date n_0 de Paris la valeur satisfaisant à la formule (7) appliquée aux angles horaires généralisés :

$$\mathrm{T}vp = \mathrm{T}vg + \mathrm{G}.$$

Ce qui donne :

$$n_0 \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vp = n \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vg + \mathrm{G},$$

d'où l'on tire :

$$n \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vg = n_0 \times 24^{\mathrm{h}} + \mathrm{H}vp - \mathrm{G}.$$

Cette formule donne $n = n_0$ si $(\mathrm{H}vp - \mathrm{G})$ est positif et plus petit que 24 heures.

Si G est positif et plus grand que $\mathrm{H}vp$, on doit, pour

ramener le deuxième membre à la forme du premier, emprunter une circonférence au terme $n_0 \times 24^h$ pour faire la soustraction : pour que l'égalité soit satisfaite, il faut alors que l'on ait $n = n_0 - 1$.

Si, au contraire, G étant négatif, $(H\nu p - G)$ est plus grande que 24 heures, on doit reporter une circonférence au premier terme, et la date n surpasse d'une unité la date n_0 du premier méridien.

Il suit de là que pour passer du temps vrai d'un lieu à celui de Paris ou réciproquement, on applique la formule (7) aux angles horaires proprement dits; mais si l'on est conduit à ajouter 24 heures à l'angle horaire donné ou à retrancher 24 heures du résultat, on doit, par compensation, retrancher ou ajouter une unité à la date.

Ce que nous venons de dire du Soleil vrai s'applique au temps du Soleil moyen, qui comporte également une date.

103. **Double date du méridien de 12^h.** — Considérons deux lieux très voisins du méridien antipode de Paris, et soient

$$G_1 = 12^h - \varepsilon, \quad G_2 = -(12^h - \varepsilon)$$

leurs longitudes respectives, ε étant une quantité positive très petite. Soit une époque quelconque exprimée en temps vrai de Paris, par exemple le 4 mars 1907 à $18^h.25^m$. A cet instant nous aurons :

$$T\nu g_1 = T\nu p - G_1 = 4 \text{ Mars } 18^h.25^m - 12^h + \varepsilon = 4 \text{ Mars } 6^h.25^m + \varepsilon$$
$$T\nu g_2 = T\nu p - G_2 = 4 \text{ Mars } 18.\ 25\ + 12\ - \varepsilon = 5 \text{ Mars } 6\ .25\ - \varepsilon.$$

On voit que la différence des temps solaires des deux lieux est très voisine de 24 heures; si ε se réduit à 0,

on est ainsi conduit, par l'application de la convention sur les dates, à donner au méridien de 12^h deux dates différentes. Ce méridien n'a donc pas de date précise, mais l'ambiguïté n'existe que pour les lieux qui s'y trouvent exactement.

104. **Conservation de la date en mer.** — Pour maintenir la date du bord en concordance avec celle des pays qu'il visite, le navigateur est obligé, d'après ce qui précède, de l'augmenter ou de la diminuer d'une unité lors du passage par le méridien de 12^h.

En effet, supposons le navire franchissant ce méridien à l'époque précisée au numéro qui précède. Si le passage a lieu en allant dans l'ouest, de G_1 vers G_2, le temps local varie brusquement du 4 mars $6^h.25^m$ au 5 mars $6^h.25^m$; par suite, pour se trouver d'accord avec l'heure locale de la nouvelle région le *lendemain* du passage, on devra donner à ce jour la date du 6 mars : il y aura saut de la date.

En allant de G_2 vers G_1, c'est-à-dire si le navire franchit le méridien de 12 heures en marchant vers l'est, l'effet est inverse : le lendemain du 5 mars doit être encore le 5 mars, il y a redoublement de la date.

105. **Temps civil.** — Nous rappelons que le jour civil se subdivise en deux périodes de 12 heures, qui se distinguent l'une de l'autre par les dénominations *matin* et *soir*. Le Bureau des longitudes a supprimé depuis 1900 ces dénominations inutiles et compte, dans ses publications, les heures de 0 à 24; l'administration des postes a suivi cet exemple. Quelques pays étran-

gers emploient le même mode de division du temps civil.

L'origine du jour civil est l'instant du passage du Soleil moyen au méridien inférieur (minuit). L'angle horaire civil se compte de 0 à 12 heures à partir du méridien inférieur le matin, et de 0 à 12 heures à partir du méridien supérieur le soir (ancienne division), ou de 0 à 24 heures à partir du méridien inférieur (nouvelle division). Dans tous les cas, la date civile change 12 heures avant la date astronomique.

Exemple : 1° Pour $Tmg = 4^h.40^m$ le 15 août, on a :

$Tmcg = 4^h.40^m$ soir le 15 août,

ou simplement $16^h.40^m$ le 15 août.

2° Pour $Tmg = 17^h.15^m$ le 15 août, on a.

$Tmcg = 5^h.15^m$ matin le 16 août,

ou simplement $5^h.15^m$ le 16 août.

Ces conventions s'appliquent aussi au Soleil vrai; dans la vie civile, on ne fait plus usage de l'heure vraie.

Il faut remarquer que ces origines différentes du jour astronomique et du jour civil de même date s'imposent : un changement de date au milieu de la période active des occupations serait en effet un inconvénient; or les travaux commerciaux s'accomplissent d'ordinaire pendant le jour, tandis que ceux des astronomes ont lieu surtout la nuit.

Changement d'astre.

106. Nous ferons usage de la relation générale :

$$(8) \qquad Tsg = Tag + \text{Æ}a,$$

démontrée en Astronomie. Nous rappelons que cette formule n'est vraie qu'à 24 heures près ; lorsque son application conduit à un résultat en désaccord avec la manière de compter l'élément cherché, on doit donc ajouter ou retrancher 24 heures pour rétablir l'accord.

En raison de l'importance de ce problème en navigation, nous le traiterons en détail, sans renvoyer aux traités d'Astronomie.

107. **Conversion du temps moyen en temps sidéral.** — La formule (8), appliquée au Soleil moyen, nous donne :

$$Tsg = Tmg + \text{Æ}m.$$

Tmg étant donné, le problème consiste à chercher $\text{Æ}m$. A cet effet on calcule $Tmp = Tmg + G$; on prend ensuite dans la Connaissance des Temps la valeur $\text{Æ}m_0$ de $\text{Æ}m$ à midi moyen de la date de Tmp, et l'on a

$$\text{Æ}m = \text{Æ}m_0 + \delta\text{Æ}m_0 \text{ pour } Tmp.$$

La variation $\delta\text{Æ}m_0$ est proportionnelle au temps ; on l'obtient très aisément au moyen de la *Table VI* de la Connaissance des Temps.

On pourrait ici se dispenser de former Tmp, prendre $\text{Æ}m_0$ pour 0^h de Paris de la date de Tmg et ensuite calculer la somme algébrique des variations de $\text{Æ}m_0$

pour les intervalles moyens T*mg* et G ; mais si G est négatif, ce procédé conduit d'abord à un calcul particulier de $\delta Ærm_0$ à cause des signes contraires de ses deux parties, puis, si $\delta Ærm_0$ est négatif, il faut encore un calcul particulier pour $Ærm$. Au contraire, dans la 1re méthode il suffit d'ajouter en une seule opération T*mg* à $Ærm_0$ et à $\delta Ærm_0$, toutes ces quantités étant positives.

Exemple numérique. — Calculer le temps sidéral du lieu de longitude $G = -7^h.49^m.12^s,0$ lorsqu'il est dans ce lieu $Tmg = 4^h.17^m.2^s,20$ le 10 janvier 1907.

	T*mg* =	4h.17m. 2s,20 le 10 janvier
	+ G = −	7 .49 .12 ,00
	T*mp* =	20 .27 .50 ,20 le 9 janvier
A 0h T*mp* le 9 janvier. . .	$Ærm_0$ =	19 .11 .28 ,01
T. VI p. T*mp*	$\delta Ærm_0$ =	+ 3 .21 ,70
	T*sg* =	23 .31 .51 ,91

108. **Conversion du temps sidéral en temps moyen.** — Pour que le problème soit déterminé, il faut évidemment que l'instant T*sg* donné soit complété par l'indication de la date de l'élément cherché T*mg*.

Appliquant encore la formule (8) au soleil moyen, on a :

$$Tmg = Tsg - Ærm, \tag{9}$$

et il nous faut calculer $Ærm$ pour l'instant donné T*sg*.

Appelons $Æ'm_0$ la valeur de cette ascension droite pour le midi moyen de la date donnée *n*. Dans l'équation générale (7) appliquée au soleil moyen

$$Tmp = Tmg + G,$$

faisons $Tmg = o$, date n. Il vient alors, d'après la convention du n° 102 :

$$Tmp = G, \text{ date } n \qquad \text{si } G > o.$$
$$Tmp = 24^h + G, \text{ date } (n-1) \text{ si } G < o.$$

Par suite, en désignant pour un instant par $\overset{n}{A}m_0$ la valeur de Am donnée par la Connaissance des Temps pour le midi moyen de Paris date n, et par v la variation constante de cet élément dans une heure moyenne, nous pourrons écrire, algébriquement :

Si $G > o$ $\qquad A'm_0 = \overset{n}{A}m_0 + vG.$

Si $G < o$

$$A'm_0 = \overset{n-1}{A}m_0 + v(24^h + G) = \overset{n}{A}m_0 + vG.$$

Pour obtenir $A'm_0$ à la date n, on doit donc prendre Am_0 pour la date donnée et calculer par la *Table VI* la variation δAm_0 pour l'intervalle moyen G, en lui donnant le signe de G puisque v est toujours positive. Nous indiquerons ce calcul ainsi, avec les notations habituelles :

$$A'm_0 = Am_0 + \delta Am_0 \text{ pour G } (T.\ VI).$$

A midi moyen local, date n, le temps sidéral local était $A'm_0$; à l'heure Tsg, même date, il s'est donc écoulé depuis midi l'intervalle sidéral $(Tsg - A'm_0)$ et il en résulte que l'ascension droite moyenne Am a pour valeur, à l'instant donné Tsg :

$$Am = A'm_0 + \delta A'm_0 \text{ pour } (Tsg - A'm_0) \text{ (T. V.)}.$$

Ce $\delta A'm_0$ est donné par la *Table V* de la Connaissance des Temps, en fonction du temps sidéral écoulé.

En remplaçant dans (9) $\mathcal{R}m$ par cette valeur, il vient :

$$Tmg = Tsg - \mathcal{R}'m_0 - \delta\mathcal{R}'m_0 \text{ pour } (Tsg - \mathcal{R}'m_0) \text{ (T. V).}$$

Le problème est donc résolu.

Toutefois, il importe de remarquer que $(Tsg - \mathcal{R}'m_0)$, exprimant le temps sidéral écoulé depuis le midi moyen précédent, doit être toujours positif; s'il se présentait avec le signe —, il faudrait évidemment restituer à Tsg les 24 heures retranchées lors du passage du point γ au méridien, passage qui aurait eu lieu dans ce cas depuis midi moyen.

Exemple numérique. — Calculer le temps moyen du lieu de longitude $G = -7^h.49^m.12^s,0$ lorsqu'il est dans ce lieu $Tsg = 23^h.31^m.51^s,91$ le 10 janvier 1907.

T. VI p. G	$\delta\mathcal{R}m_0 =$	$0^h.\ 1^m.17^s,08$
$Tmp_0 = 0^h$ le 10 janv...	$\mathcal{R}m_0 =$	19 .15 .24 ,57
$Tmg_0 = 0^h$ le 10 janv...	$\mathcal{R}'m_0 =$	19 .14 . 7 ,49
	$Tsg =$	$23^h.31^m.51^s,91$
	$-\mathcal{R}'m_0 =$	— 19 .14 . 7 ,49
	$Tsg - \mathcal{R}'m_0 =$	4 .17 .44 ,42
T. V $p(Tsg - \mathcal{R}'m_0)$	$-\delta\mathcal{R}'m_0 =$	— 0 .42 ,22
	$Tmg =$	4 .17 . 2 ,20 le 10 janvier.

Remarque. — On peut effectuer la conversion précédente d'une manière un peu différente, en se servant deux fois de la *Table V;* mais le procédé que nous indiquons n'est jamais plus long, et il est plus simple lorsqu'il s'agit d'effectuer plusieurs conversions pour la même date, ce qui se présente quand on veut calculer les heures moyennes des passages d'une série d'étoiles, en vue d'observer leurs hauteurs méridiennes.

109. **Conversion du temps moyen en temps d'un astre quelconque.** — On commence par transformer le temps moyen donné en temps sidéral; on a ensuite :

$$Tag = Tsg - Ra,$$

et il ne reste plus qu'à calculer Ra.

Pour les étoiles, ce calcul est des plus simples, car il suffit d'effectuer une interpolation à vue pour la date.

Pour les astres très mobiles, Soleil, Lune et planètes, l'ascension droite est donnée en fonction du temps moyen de Paris. On forme donc d'abord :

$$Tmp = Tmg + G,$$

puis on interpole pour $\tau = (Tmp - Tmp_0)$, conformément aux principes du n° 95.

Cependant, pour le Soleil, on peut se dispenser de passer par le temps sidéral, et le calcul est alors plus simple.

110. *Cas du Soleil. Transformation directe du temps moyen en temps vrai.* — On a en effet :

$$Tsg = Tmg + R_m = Tvg + R_v;$$

d'où $$Tvg = Tmg + R_m - R_v.$$

Posons :

$$Em = Rm - R_v.$$

Cette quantité est nommée *équation du temps moyen*, par analogie avec l'équation du temps vrai

$$Ev = (R_v - R_m),$$

employée en Astronomie.

La Connaissance des Temps donne Em pour le midi moyen de Paris de chaque jour, comme nous l'avons

dit au n° 94 ; la variation horaire de cet élément est sensiblement égale et de signe contraire à celle donnée pour Ev à la même date dans les pages de gauche.

Formant Tmp = Tmg + G, on prend dans la Table l'élément Em_0 en choisissant pour époque initiale Tmp_0 le midi moyen de Paris le plus voisin de l'époque Tmp, puis on interpole pour l'intervalle $\tau = (Tmp - Tmp_0)$ qui est égal, selon le cas, à Tmp ou à T$mp - 24^h$. On a ainsi : $Em = Em_0 + \delta Em_0$ pour τ,

et enfin : $Tvg = Tmg + Em$.

Il faut remarquer que, lorsque Em est négative, la Connaissance des Temps donne non pas Em, mais $E'm = 24^h + Em$. En ce cas, on a :

$$E'm > 23 \text{ heures}.$$

Il y a donc lieu de toujours retrancher 24 heures au résultat Tvg, sans changer la date de Tmg, lorsque l'élément tabulaire est supérieur à 23 heures. Toutefois, si Tmg est voisin de 0, il peut arriver que (Tmg + E'm) soit inférieur à 24 heures ; il faut alors opérer la soustraction de 24 heures en retranchant une unité de la date de Tmg.

Remarque. — On pourrait évidemment prendre Em_0 pour la date de Tmg et interpoler successivement pour Tmg et pour G ; mais ce n'est pas plus simple, et d'ailleurs, en navigation, c'est généralement l'élément Tmp qui est donné (par les chronomètres) : on en déduit Tmg, puis Tvg.

Exemple numérique. — Calculer le temps vrai du lieu $G = +10^h.3^m.25^s,4$ lorsqu'il est dans ce lieu $Tmg = 15^h.29^m.17^s,61$ le 25 décembre 1907.

	$Tmg =$	$15^h.29^m.17^s,61$ le 25 déc.
	$+ G =$	$+ 10 . 3 .25 .40$
	$Tmp =$	$1 .32 .43 ,01$ le 26 déc.
$Tmp_o = 0^h$ le 26 déc...	$Em_o =$	$23 .59 .46 ,42$
Pour $\tau = Tmp$...	$\delta Em_o =$	$- 1 ,92$
	$Em =$	$23 .59 .44 ,50$
	$Tvg =$	$15 .29 . 2 ,11$ le 25 déc.

111. **Conversion du temps d'un astre quelconque en temps moyen.** — Comme au n° 108, il faut que Tag soit complété par l'indication de la date de l'élément Tmg cherché.

On applique la formule

$$Tsg = Tag + Ra,$$

et on transforme ensuite en temps moyen le temps sidéral obtenu.

L'élément Ra se tire de la Connaissance des Temps. Pour les étoiles, on l'obtient facilement par interpolation à vue pour la date; pour les autres astres, on opère comme il suit :

112. 1° *Soleil. Conversion du temps vrai en temps moyen.* — Dans le cas du Soleil, il est inutile de passer par le temps sidéral. On a en effet :

$$Tmg = Tvg + Ev.$$

L'équation du temps vrai Ev se calcule d'une manière tout à fait analogue à celle employée au n° 110 pour Em; il suffit de rapporter au temps vrai tout ce qui a été dit pour le temps moyen.

113. 2° *Lune et planètes.* — On forme d'abord l'angle horaire pour Paris par la formule

$$Tap = Tag + G.$$

Pour la Lune, l'ascension droite est donnée pour les instants des passages aux méridiens des lieux de longitudes 0^h, 1^h, ..., 24^h à l'ouest de Paris (par exception, dans ce cas particulier, la longitude inscrite dans la Table est comptée de cette manière). Il y a ainsi un tableau spécial à chaque jour de l'année, sauf pour les jours qui avoisinent la nouvelle lune.

Nous cherchons $\mathcal{A}\,\mathbb{C}$ pour l'instant $T\,\mathbb{C}\,p$; or, lorsque l'angle horaire de la Lune à Paris est égal à $T\,\mathbb{C}\,p$, l'astre est au méridien du lieu de longitude $G_1 = T\,\mathbb{C}\,p$, en comptant G_1 de 0 à 24 heures vers l'ouest, c'est-à-dire précisément comme le fait l'éphéméride. Il suffit donc de prendre $\mathcal{A}_0\,\mathbb{C}$ pour le passage au méridien G_0 le plus voisin de G_1 et de l'interpoler pour l'intervalle de temps lunaire $\tau = G_1 - G_0$, ce qui n'offre aucune difficulté.

Il y a seulement lieu de remarquer ici que pour entrer dans la table il faut connaître la date du tableau à employer, c'est-à-dire la date de Paris qui correspond à $T\,\mathbb{C}\,p$; on obtient cette date en calculant une valeur grossièrement approchée de Tmg par la formule

$$Tmg = T\,\mathbb{C}\,g + \mathcal{A}\,\mathbb{C} - \mathcal{A}m,$$

en prenant $\mathcal{A}\,\mathbb{C}$ et $\mathcal{A}m$ à vue pour la date donnée; la valeur approchée $Tmp = Tmg + G$ fait ensuite connaître la date cherchée.

Pour les planètes, un calcul approché analogue fixe la date de Tmp correspondant à Tap. On prend ensuite l'ascension droite tabulaire pour le passage supérieur à Paris de cette date, et on interpole pour Tap en observant que l'ascension droite cherchée correspond au passage au méridien de longitude $G_1 = Tap$. La

variation de $\mathcal{R}a$ pour 1 heure de longitude étant donnée, le calcul est très simple; toutefois, si $Tap > 12$ heures, il est avantageux de prendre comme point de départ de l'interpolation le passage du lendemain et de calculer la variation de $\mathcal{R}a$ pour

$$G_1 = Tap - 24^h.$$

Aux environs de la nouvelle Lune, ou lorsque la planète passe au méridien de Paris en plein jour, la Connaissance des Temps ne donne plus l'ascension droite au moment des passages. Il faut alors avoir recours aux tableaux donnant cet élément en fonction du temps moyen de Paris. Dans ce cas, on est obligé d'opérer par approximations successives. On commence par calculer Tmp grossièrement, comme plus haut; avec cette valeur de Tmp, on calcule par interpolation des valeurs plus précises $\mathcal{R}'a$ et $\mathcal{R}'m$, ce qui donne en première approximation :

$$T'mp = Tap + \mathcal{R}'a - \mathcal{R}'m.$$

On recommence le calcul de $\mathcal{R}a$ et de $\mathcal{R}m$ avec $T'mp$, puis on en déduit une valeur $T''mp$ encore plus exacte, et ainsi de suite. Du reste, lorsque Tag résulte d'un calcul d'angle horaire par la hauteur (réglage des chronomètres), on connaît toujours, dans la pratique, une valeur de Tmp suffisamment précise pour donner *a priori* une valeur de $\mathcal{R}a$ dont on peut généralement se contenter. Dans les autres cas (levers et couchers des astres), une grande précision n'est pas nécessaire, et $T'mp$ suffit ordinairement.

Exemple numérique. — Calculer le temps moyen du lieu de longitude $G = -7^h.17^m.20^s,0$ lorsqu'on a dans ce lieu $T\,\mathbb{C}\,g = 18^h.37^m.21^s,61$ le 20 avril 1907.

$T\,\mathbb{C}\,g = 18^h.37^m.21^s,61$
$+G = -7\ .17\ .20\ ,00$
$T\,\mathbb{C}\,p = 11\ .20\ .\ 1\ ,61$

A vue, pour $Tmp_o = 0^h$ le 20 avril :
$\mathcal{R}\,\mathbb{C} = 7\ .49$
$\mathcal{R}m_o = 1\ .49\ .39\ ,94$
$\mathcal{R}\,\mathbb{C} - \mathcal{R}m = 5\ .59$
Tmg app. $= 0\ .36$ le 20 avril
$+G = -7\ .17$
Tmp app. $= 17\ .19$ le 19 avril

$T\,\mathbb{C}\,p = G_1 = +11^h.20^m.\ 1^s,61$
$G_o = +11\ .\ 0\ ,\ 0\ .\ .$
$\tau = +\ 20\ ,03\ .\ .\ .\ .\ .$
$Tmp_o = 0^h$ le 20... $\mathcal{R}m_o = 1^h.49^m.39^s,94$
T. VI p. G... $\delta\mathcal{R}m_o = -\ 1\ .11\ ,84$
$Tmg_o = 0^h$ le 20... $\mathcal{R}'m_o = 1\ .48\ .28\ ,10$

Tableau : « Vendredi 19, temps local. »
$\mathcal{R}_o\,\mathbb{C} = 7^h.33^m.18^s,37^{\nu} = +2^s,1921$
$\delta\mathcal{R}_o\,\mathbb{C} = +\ 43\ ,91$
$\mathcal{R}\,\mathbb{C}$ tabulaire $= 7\ .34\ .\ 2\ ,28$
Corr. Newcomb $= -\ 1\ ,97$
$\mathcal{R}\,\mathbb{C} = 7\ .34\ .\ 0\ ,31$
$T\,\mathbb{C}\,g = 18\ .37\ .21\ ,61$
$Tsg = 2\ .11\ .21\ ,92$
$-\mathcal{R}'m_o = -\ 1\ .48\ .28\ .10$
$Tsg - \mathcal{R}'m_o = 0\ .22\ .53\ ,82$
T. V... $-\delta\mathcal{R}'m_o = -\ 3,75$
$Tmg = 0,\ 22\ .50\ ,07$ le 20 avril 1907

114. **Temps moyen du passage d'un astre au méridien.** — Lorsqu'un astre passe au méridien, l'angle horaire local est nul ; le problème des passages est donc un cas particulier du précédent.

Pour la Lune et les planètes, on peut opérer plus rapidement que par la méthode générale, avec une approximation plus que suffisante pour les besoins de la navigation. Nous allons indiquer ces procédés expéditifs.

115. *Lune.* — La Connaissance des Temps donne, pour chaque jour, et à la demi-seconde près, le temps moyen local du passage pour les méridiens de longitudes 0^h, 1^h, ... 24^h à l'ouest de Paris.

A l'instant du passage au méridien G on a, puisque T ☾ $g = 0$:

$$\mathrm{T}mg = \mathrm{AR}\ ☾ - \mathrm{AR}m.$$

D'autre part, on a aussi T ☾ $p = \mathrm{G}$, en comptant G de 0 à 24 heures vers l'ouest.

On peut donc dire que la Connaissance des Temps donne l'élément ($\mathrm{AR}\ ☾ - \mathrm{AR}m$) en fonction du temps lunaire à Paris. Par suite, si l'on prend cet élément pour le méridien G_0 le plus voisin de G, on a, à l'instant cherché :

$$\mathrm{AR}\ ☾ - \mathrm{AR}m = (\mathrm{AR}\ ☾ - \mathrm{AR}m)_0 + \delta(\mathrm{AR}\ ☾ - \mathrm{AR}m)_0 \text{ pour } (\mathrm{G} - \mathrm{G}_0).$$

La variation de AR ☾ pour une minute de temps lunaire est donnée dans la colonne *variation pour une minute de longitude ;* pour obtenir celle de (AR ☾ $-$ ARm), il suffit d'en retrancher celle de ARm qui est sensiblement constante et égale à $0^s,17$.

Il faut naturellement entrer dans le tableau relatif à la date donnée, puisque les heures de passage sont exprimées en temps moyen de cette date.

116. *Planètes.* — L'élément ($Æa$—$Æm$) est donné pour chaque jour, au moment du passage à Paris, sous le titre *Heure du passage*, ainsi que sa variation v pour 1 heure de longitude. Il suffit donc d'interpoler pour G en calculant algébriquement la variation vG de l'élément.

Problème général.

117. Il est maintenant bien facile de calculer T$a'g'$ connaissant Tag, puisque l'on sait passer de Tag à Tag' (changement de lieu) et de Tag' à T$a'g'$ (changegement d'astre). Le problème est donc entièrement résolu.

CHAPITRE II

SEXTANT

118. **Description sommaire.** — Le sextant se compose d'un secteur circulaire métallique ACB et d'une alidade mobile MD pivotant dans le plan du secteur autour du centre C.

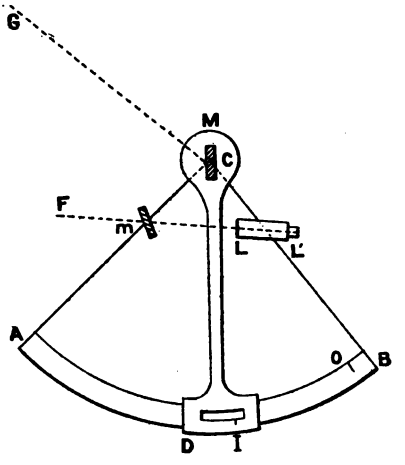


Fig. 20.

L'arc AB se nomme le *limbe;* son amplitude est de 80° environ. Il est muni d'une graduation dont l'origine O est du côté du point B.

Une vis de pression, complétée par une vis de rappel, sert à fixer momentanément l'alidade au limbe.

119. L'alidade porte un index I, zéro d'un vernier au

$\frac{1}{60}$, qui permet de lire l'angle d'écart de la ligne CI avec sa position initiale CO. Toutefois, pour une raison que nous ferons connaître (n° 122), les divisions du limbe ont une amplitude égale à la moitié de celle qui convient au rayon CO. Ainsi, lorsque l'arc OI est en réalité 25°, l'index I se trouve sur la division 50°; il suit de là que lorsque l'alidade tourne d'un angle α, la lecture varie de 2α.

A l'alidade est fixé un miroir M, appelé *grand miroir*, dont le centre est au-dessus du pivot. Un second miroir, dit *petit miroir*, est lié au rayon de gauche CA. Ces miroirs sont des glaces étamées; cependant le tain ne recouvre que la moitié inférieure du petit miroir, de telle manière que l'objectif de la lunette LL', fixée au rayon CB, puisse recevoir à la fois des rayons lumineux réfléchis par ce miroir et d'autres le traversant directement.

Quand l'instrument est rectifié, le plan du limbe se trouve parallèle à l'axe optique de la lunette et perpendiculaire aux plans des miroirs.

L'axe optique est pointé invariablement sur la ligne médiane du petit miroir, et la normale à ce dernier est bissectrice de l'angle C*m*L; il en résulte que, si F est un objet situé dans la direction L*m* et G un objet tel que le rayon GC se réfléchisse suivant C*m*, les images de ces objets se superposeront dans le champ de la lunette.

L'instrument est muni d'une poignée fixée à la face inférieure du plan du secteur; ce dernier est évidé de manière à être rendu aussi léger que possible sans cesser d'être rigide.

Le plus souvent, deux divisions consécutives du limbe comprennent entre elles un intervalle correspondant soit à 10′, soit à 30′; le vernier donne alors directement soit la dizaine, soit la trentaine de secondes ronde, et la *lecture* est exacte à moins de 5″ ou de 15″ près, selon le cas. On trouve aussi des limbes gradués à 15′ et à 20′; enfin quelques instruments anciens ont leur limbe à 10′ avec vernier au $\frac{1}{40}$, donnant directement les 15″.

La division 30′-30″ paraît la plus avantageuse, parce que l'espacement des traits rend les lectures très faciles, surtout la nuit. D'ailleurs ce mode de division n'exclut pas la précision dont on peut avoir besoin dans les observations à terre, car une simple interpolation à vue sur le vernier permet à un observateur exercé d'obtenir une lecture correcte à 5″ près environ.

120. **Principe du sextant.** — Soit MPM′P′ la section droite d'une glace à faces parallèles dont la face M′P′ est étamée.

On sait que l'œil, supposé placé en K, aperçoit par réflexion plusieurs images d'un point lumineux tel que A.

La plus intense de ces images, quand l'angle d'incidence i n'est pas très grand, est formée par les rayons tels que ABDEK réfractés à l'entrée et à la sortie et réfléchis par la face étamée; ces rayons paraissent émaner du point A′ symétrique de A par rapport à un plan $\mu\nu$ parallèle aux faces du miroir, et l'on a :

$$CH = BH \cot g\, i = HD \operatorname{tg} r \cot g\, i.$$

On a d'ailleurs, n étant l'indice de réfraction du verre :

$$\sin i = n \sin r,$$

et, en posant $HD = e$, épaisseur du miroir :

(1)

$$CH = e \operatorname{cotg} i \frac{\sin r}{\sqrt{1 - \sin^2 r}} = e \operatorname{cotg} i \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 r}}$$

$$= e \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = \frac{e}{\sqrt{1 + (n^2 - 1) \sec^2 i}}.$$

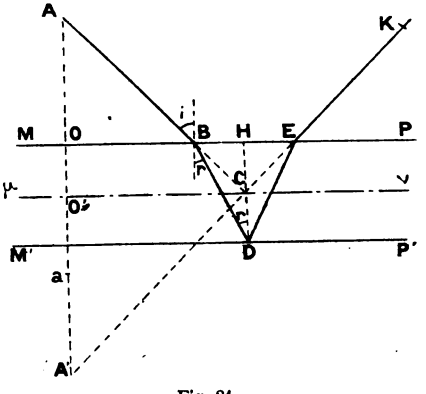


Fig. 21.

Les images secondaires, telles que celle formée par la réflexion sur la face MP et paraissant provenir du point a symétrique de A par rapport à MP, se confondent avec la précédente si la distance AO est assez grande devant e pour que l'angle aKA′ soit négligeable. Dans l'observation de points éloignés, on peut donc supposer la glace MPM′P′ remplacée par un plan réflé-

chissant $\mu\nu$ parallèle aux faces et situé entre elles, à une distance de la face antérieure donnée par la formule (1). Cette distance est variable avec l'incidence i; pour $15° < i < 70°$ et $n = 1{,}5$ on trouve :

$$0{,}7\,e > \mathrm{CH} > 0{,}3\,e.$$

121. Soit maintenant un plan réfléchissant $\mu\nu$ recevant un rayon lumineux AB sous l'incidence $\mathrm{ABN} = i$. Après réflexion, le rayon prend la direction BC telle que $\mathrm{NBC} = i$.

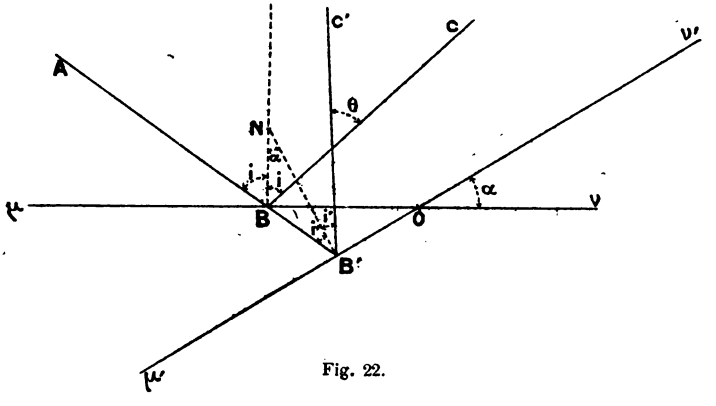


Fig. 22.

Amenons le miroir $\mu\nu$ en $\mu'\nu'$ en le faisant tourner d'un angle α autour d'un axe O perpendiculaire au plan d'incidence.

Le rayon réfléchi devient B'C', et l'on a, en appelant i' le nouvel angle d'incidence :

$$i = \alpha + i',$$

$$2i = \theta + 2i',$$

d'où

$$\theta = 2\alpha.$$

Ainsi, lorsque le miroir tourne d'un angle α, le rayon réfléchi tourne d'un angle double, et dans le même sens.

122. Cela posé, soit à mesurer au sextant la distance angulaire de deux points R et S.

Visons d'abord l'objet de gauche R avec la lunette et, tout en conservant l'image directe au centre du

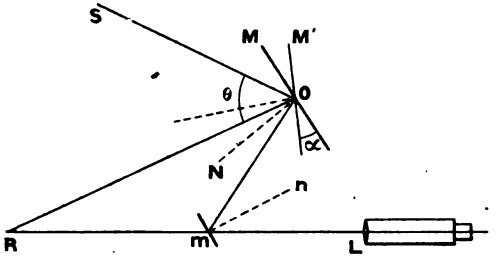


Fig. 23.

réticule, faisons mouvoir l'alidade jusqu'à ce que le grand miroir OM soit perpendiculaire à la bissectrice ON de l'angle RO*m*. Ce résultat sera atteint lorsque nous verrons l'image doublement réfléchie de R se superposer à l'image directe, puisqu'alors le rayon RO se réfléchira suivant O*m*. Soit l_1 la lecture de l'index dans cette position OM.

Par une rotation de tout l'instrument autour de l'axe optique de la lunette, amenons le point S dans le plan du limbe, s'il n'y est déjà, puis faisons tourner l'alidade, et par suite le grand miroir, d'un angle α dans le sens des graduations. Soit l_2 la lecture dans cette deuxième position OM'. Le rayon qui se réfléchit maintenant suivant O*m* fait un angle 2α avec sa première

position RO, d'après ce qui précède; par suite, si l'image doublement réfléchie de S est en contact avec l'image directe de R, la distance angulaire cherchée θ est égale à 2α.

Or, d'après le mode de division du limbe (n° 119), la différence $(l_2 - l_1)$ des lectures est précisément égale à 2α, c'est-à-dire à θ.

C'est pour éviter d'avoir à doubler les indications de l'instrument que ce mode de division a été adopté.

Tel est le principe d'une mesure de distance angulaire au sextant.

123. **Point de parallélisme. Collimation.** — Si le point R s'éloigne à l'infini, le rayon RO devient parallèle à R*m*, et l'angle RO*m* est égal à O*m*L : leurs moitiés sont donc égales, et par suite on a NO*m* = *nm*O. Les normales aux miroirs étant parallèles, les plans de ceux-ci le sont également.

La position occupée sur la graduation par l'index de l'alidade, lorsque les miroirs sont parallèles, est appelée *point de parallélisme*. Pour déterminer ce point, il suffit de mettre en contact les images directe et réfléchie d'un point assez éloigné pour que l'angle OR*m* soit négligeable, c'est-à-dire soit inférieur à l'incertitude de la lecture. Si nous fixons cette dernière à $\pm 5''$, la distance d du point visé doit satisfaire à l'inégalité suivante, en appelant p la distance du centre O du limbe à l'axe optique :

$$\operatorname{tg} 5'' > \frac{p}{d}, \quad \text{ou} \quad 5 \text{ arc } 1'' > \frac{p}{d};$$

d'où

$$d > \frac{p}{5 \text{ arc } 1''}.$$

En moyenne on a $p = 0^m,055$, ce qui donne :

$$d > 2260^m.$$

Lorsqu'on veut mesurer la distance angulaire de deux objets éloignés, la première lecture l_1 faite comme il est dit au n° 122 fait connaître le point de parallélisme, et l'angle cherché est $\theta = l_2 - l_1$.

Si l'on avait $l_1 = 0$, la lecture l_2 donnerait immédiatement la distance ; en général, il n'en tes pas ainsi, mais l_1 est toujours un petit angle. On nomme *correction de collimation* ou simplement *collimation* la correction à apporter à l_2 pour obtenir θ. En désignant, suivant l'usage, par ε cette correction, on a donc, par définition :

$$\theta = l_2 + \varepsilon.$$

Il suit de là que $\varepsilon = -l_1$. Ainsi la collimation est égale à la lecture du point de parallélisme prise en signe contraire.

Si la lecture l_1 est faite non pas sur la graduation normale située à gauche du zéro du limbe, mais bien sur l'excédent de cette graduation qui s'étend en sens inverse, à droite du zéro, il faut évidemment donner à l_1 le signe — pour appliquer la formule $\theta = l_2 - l_1$, sans quoi cette différence ne représenterait plus le double de l'arc géométrique décrit par l'index entre les deux pointés. Si donc le point de parallélisme tombe à gauche du zéro du limbe, on a $l_1 > 0$ et $\varepsilon < 0$; si, au contraire, ce point tombe à droite du zéro, on a $l_1 < 0$ et $\varepsilon > 0$. Ainsi *la collimation est positive ou négative selon que le point de parallélisme est à droite ou à gauche du zéro du limbe.*

124. Le double de l'arc décrit par l'index ou, ce qui revient au même, par la trace du grand miroir depuis le point de parallélisme jusqu'à la position l_2 est égal à $(l_2 - l_1)$, c'est-à-dire à $(l_2 + \varepsilon)$, ainsi qu'on vient de le voir. Une lecture quelconque de l'index, corrigée de la collimation, est donc égale au double de l'angle que font les miroirs dans cette position : c'est aussi la distance angulaire θ des deux objets dont les images, directe de l'un, doublement réfléchie de l'autre, paraissent coïncider.

125. **Remarque.** — Lors d'une série de mesures de distances angulaires de divers points éloignés, il suffit de déterminer une fois pour toutes la collimation et d'appliquer cette correction à la lecture correspondant à la coïncidence établie entre l'image directe de l'un des points et l'image doublement réfléchie d'un autre. Chaque angle à mesurer n'exige ainsi qu'un seul pointé.

Mais si pour l'une des observations le point visé directement est à une distance inférieure à 2 kilomètres, il faut avoir soin de déterminer la correction spéciale à cette mesure en établissant tout d'abord la coïncidence des images de ce point et en écrivant $\varepsilon_1 = -l_1$. Cependant, comme cette remarque ne peut s'appliquer qu'à un pointé sur un objet terrestre, il n'est pas nécessaire, en général, d'obtenir en ce cas une grande précision, et il n'y a lieu de s'inquiéter de la différence entre la collimation et la correction réelle que si l'objet est très rapproché, Si l'on ne tient pas à une précision supérieure à la minute d'arc, il suffit que la distance ne soit pas inférieure à 190 mètres.

Rectifications du sextant.

Nous avons admis plus haut que les visées étaient faites dans un plan parallèle à celui du limbe et que ce plan était perpendiculaire à ceux des miroirs. Il faut donc pouvoir s'assurer que ces conditions sont remplies et savoir les réaliser de nouveau si l'on s'aperçoit que l'instrument a subi quelque dérangement.

126. **Rectification de l'axe optique de la lunette.** — Le sextant est muni de deux lunettes. L'une, du système de Galilée, donne des images redressées et sert principalement aux mesures angulaires d'objets terrestres; l'autre, destinée aux mesures de précision, est une lunette astronomique munie d'un réticule.

Le réticule de la lunette astronomique se compose de quatre fils perpendiculaires deux à deux, formant un carré dont le centre coïncide sensiblement avec celui du champ. *L'axe optique* de la lunette est la droite qui joint le centre optique de l'objectif au centre du carré du réticule.

L'axe optique est rectifié lorsqu'il est parallèle au plan du limbe.

Pour faire cette rectification, on pose le sextant horizontalement sur une table, puis on dispose sur une corde du limbe à peu près parallèle à la lunette deux petites équerres de même hauteur nommées *viseurs*.

Plaçant ensuite l'œil dans l'alignement des arêtes supérieures des viseurs, on fait alors marquer un trait

de repère sur un mur, dans le plan parallèle au limbe déterminé par ces arêtes. La lunette étant mise au point pour la distance du mur, on tourne le porte-oculaire jusqu'à rendre deux des fils du réticule parallèles au limbe; enfin l'on élève et l'on abaisse le porte-lunette de manière à mettre l'axe du tube à la hauteur des arêtes supérieures des viseurs.

Ceci fait, si l'axe optique est rectifié, le repère doit paraître à égale distance des fils supérieur et inférieur; si cette condition n'est pas remplie, on la réalise en manœuvrant les vis du collier du porte-lunette.

127. **Perpendicularité des miroirs.** — 1° *Grand miroir.* — Les constructeurs disposent le grand miroir de manière à ce que l'axe de rotation soit équidistant des faces. Or nous avons vu au n° 120 que la réflexion principale sur une glace étamée peut être considérée comme s'effectuant sur un plan parallèle aux faces, mais dont la position varie avec l'obliquité des rayons; par suite, l'axe de rotation est toujours voisin du plan réfléchissant, mais ne s'y trouve exactement que par hasard.

Soient O le centre du limbe, ABC son contour extérieur et MM' le plan réfléchissant du grand miroir pour les rayons lumineux émanant de la partie V_2.

Supposons le miroir perpendiculaire; l'œil, placé en D, voit l'image réfléchie de l'arc V_2C se substituer à l'image de l'arc V_1A et apparaître dans le plan du limbe en V'_2C', symétrique de V_2C par rapport à M'B.

Cet arc symétrique a son centre en O' symétrique de O; il passe par le point B, et le point V'_2 est en arrière du point V_1 dans le cas de la figure. L'œil,

nécessairement placé un peu au-dessus du plan du limbe, ne voit donc pas l'arc V'_2C' continuer l'arc V_1B : il y a une petite solution de continuité en $V_1V'_2$. Toutefois, comme l'excentricité de MM′ est petite, l'écart est peu apparent.

Mais si nous plaçons en V_1 un viseur à moitié caché par l'arête M du miroir, puis si nous faisons glisser

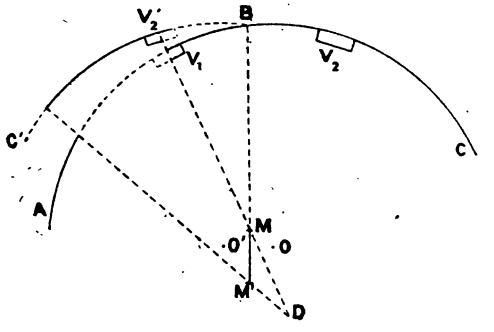


Fig. 24.

un autre viseur jusqu'à la position symétrique V_2, l'image de l'arête supérieure de ce viseur paraît en V'_2 exactement dans le prolongement de celle de V_1 si l'œil est amené dans le plan de ces arêtes, ce qui est facile : lorsque le viseur est posé sur le limbe, la hauteur de l'arête supérieure est en effet la moitié de celle du miroir.

Supposons maintenant que le miroir s'incline vers l'œil D en tournant autour de sa trace M′B. L'image V'_2C' s'élève au-dessus du plan du limbe, et la solution de continuité $V_1V'_2$ entre le limbe et son image appa-

raît très nettement; de même l'image V'_2 de l'arête supérieure du viseur V_2 s'élève au-dessus de celle du viseur V_1 et ne la prolonge plus lorsque l'œil est placé dans leur plan.

Si le miroir s'incline en sens inverse, l'image réfléchie paraît au contraire s'abaisser. Il suit de là que, pour opérer la rectification, il suffit de faire tourner le miroir autour de sa trace horizontale, à l'aide de la vis *ad hoc*, jusqu'à ce que les arêtes supérieures directe et réfléchie des viseurs se prolongent exactement.

Si les viseurs sont bien éclairés de face et se détachent sur un fond clair et uniforme, cette rectification est assez précise pour assurer la perpendicularité à quelques minutes près. La rectification sans les viseurs, opérée au moyen du limbe seul, est moins exacte, puisque dans la position de perpendicularité il doit nécessairement subsister un petit écart.

Remarque. — Il est bon, après avoir effectué la rectification du grand miroir, de la vérifier en plaçant successivement l'alidade dans d'autres positions. Si la rectification ne subsistait pas, le plan du limbe serait faussé, ou bien encore l'axe de rotation de l'alidade ne serait pas perpendiculaire à ce plan : dans les deux cas, l'instrument ne pourrait servir.

128. 2° *Petit miroir.* — Pour étudier les changements de direction des rayons lumineux produits par la rotation de l'alidade, nous transporterons les deux miroirs, parallèlement à eux-mêmes, jusqu'à ce que leurs plans passent par le centre optique de l'objectif.

On sait que lorsque l'on fait mouvoir un miroir plan parallèlement à lui-même en l'amenant d'une position M

à une position M′, l'image virtuelle A_1 d'un point A se déplace linéairement du double de la distance des plans M et M′; par suite, la direction dans laquelle cette image est aperçue reste invariable si sa distance au miroir est assez grande devant le déplacement pour que l'angle $A_1OA'_1$ soit négligeable.

Nous supposerons dans ce qui suit que cette condition est remplie, c'est-à-dire que les points visés sont des astres ou des objets terrestres très éloignés.

De plus, nous considérerons non pas les directions elles-mêmes, mais leurs intersections avec la surface d'une sphère de rayon arbitraire ayant son centre au centre optique de l'objectif : nous pourrons ainsi substituer aux angles les arcs de grand cercle qui les mesurent.

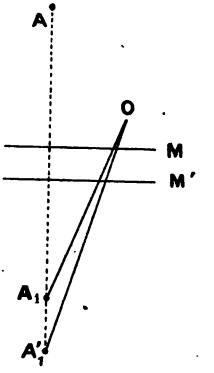


Fig. 25.

129. Cela posé, je dis d'abord que pour que la coïncidence des images directe et doublement réfléchie d'un même point puisse être réalisée par un mouvement de l'alidade, il faut et il suffit que les miroirs aient la même inclinaison sur le plan du limbe.

Soit OP la parallèle à l'axe de rotation de l'alidade menée par le centre optique O, et soit LL′ le grand cercle détaché sur la sphère par le plan parallèle au limbe, c'est-à-dire perpendiculaire à OP.

Soient ON et O*n* les normales aux grand et petit miroirs transportés en O, et OA la direction de l'axe

optique: Nous supposons ON dirigée en avant et O*n* dirigée en arrière des faces réfléchissantes de leurs miroirs respectifs. Menons l'arc de grand cercle A*n*A′ et prenons $nA' = nA$; de même menons l'arc A′N et prolongeons-le en A″ tel que $NA'' = NA'$.

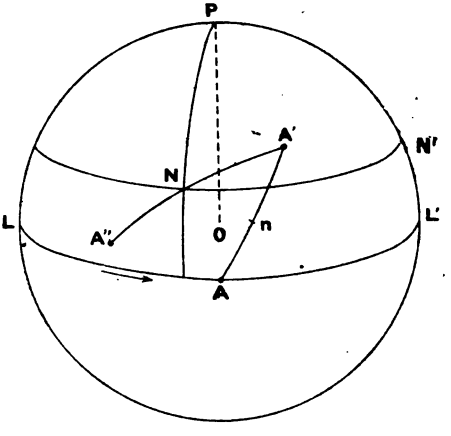


Fig. 26.

Le rayon lumineux A″O issu du point A″ de l'espace perce la sphère en A′ après sa réflexion sur le grand miroir, d'après la construction; de même, après réflexion sur le petit miroir, le rayon parallèle à OA′ prend la direction AO, et par suite, l'image doublement réfléchie du point A″ coïncide avec l'image directe du point A de l'espace.

Faisons tourner l'alidade dans le sens de la flèche. Le plan OPN, qui contient la normale au grand miroir transporté, tourne du même angle et dans le même

sens autour de OP, et le point N décrit un petit cercle NN′ parallèle à LL′. Le point A″ restant symétrique de A′ par rapport à ON, la coïncidence de A″ et de A n'est possible que si N peut coïncider avec *n;* or ceci exige que ce dernier point soit sur le petit cercle NN′, c'est-à-dire que les normales, et par suite les miroirs, aient la même inclinaison sur le plan du limbe LL′.

Il résulte de là que, si le grand miroir a été préalablement rendu perpendiculaire au limbe, il suffit, pour assurer la perpendicularité du petit miroir, de le disposer de manière à pouvoir amener l'image directe d'un point éloigné en contact avec son image doublement réfléchie.

Voyons comment l'on peut y parvenir.

130. Soient comme précédemment O le centre optique de l'objectif, LL′ le grand cercle parallèle au limbe et OP la parallèle à l'axe de rotation de l'alidade.

Le grand miroir ayant été rectifié, son plan transporté parallèlement à lui-même en O passe par OP et détache sur la sphère le grand cercle PM.

Soit *pmp′* le plan parallèle au petit miroir incliné sur OP de l'angle $Pop = i$.

Un point B vu directement dans la direction OB donne une image réfléchie sur le grand miroir dans une direction OB′ telle que MB′ = MB, et l'image doublement réfléchie s'obtient en prenant le symétrique B″ de B′ par rapport au petit miroir *pmp′*.

Si nous faisons tourner le grand miroir autour de PO, B′ décrit LL′ et B″ décrit le grand cercle L_1L_1' symétrique de LL′ par rapport à *pmp′*, c'est-à-dire incliné

sur LL de l'angle $2i$. D'ailleurs l'arc mB'' est à chaque instant égal à l'arc mB'.

Lorsque OM coïncide avec Om, les traces des miroirs sur le plan du limbe sont parallèles : B fait alors sa première image en B'_1, l'image doublement réfléchie est en B''_1 et l'on a : $mB = mB'_1 = mB''_1$.

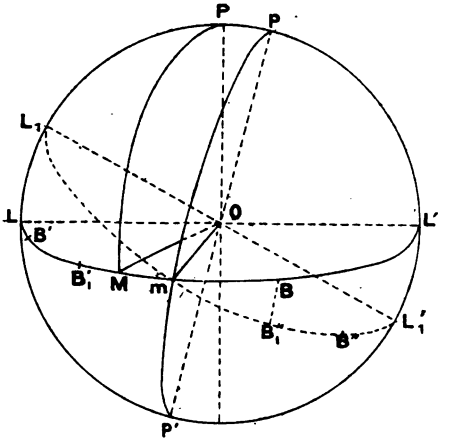


Fig. 27.

Appelons β le complément de l'angle moB : c'est l'angle de l'axe optique avec la normale au petit miroir lorsque $i = 0$. Calculons l'écart BB''_1 des images et l'angle mBB''_1 lorsque les traces sont parallèles; on a, dans le triangle isocèle BmB''_1 :

$$\cos BB''_1 = \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \cos 2i,$$

d'où, après des réductions faciles :

$$\sin \frac{BB''_1}{2} = \cos \beta \sin i.$$

On a aussi :

$$\cos mB \cos 2i = \operatorname{cotg} mB''_1 \sin mB - \operatorname{cotg} mBB''_1 \sin 2i,$$

$$\sin \beta \cos 2i = \sin \beta - \operatorname{cotg} mBB''_1 \sin 2i,$$

d'où :

$$\operatorname{cotg} mBB''_1 = \sin \beta \frac{1 - \cos 2i}{\sin 2i} = \sin \beta \operatorname{tg} i,$$

ce qui montre que l'angle mBB''_1 est voisin de 90° lorsque i est très petit.

L'angle β varie très peu d'un sextant à l'autre et est en moyenne de 15°.

Si nous prenons $i = 1°$, ce qui est déjà considérable, on trouve :

$$BB''_1 = 1°,9,$$

$$mBB''_1 = 89°,7.$$

Ainsi le petit arc qui joint les images dans le champ est très sensiblement perpendiculaire au limbe lorsque les traces des miroirs sont parallèles.

Cette apparence est facile à réaliser en faisant tourner le porte-oculaire jusqu'à rendre l'un des couples de fils perpendiculaire au limbe et en amenant ensuite par un mouvement de l'alidade l'image réfléchie sur la parallèle à ces fils passant par l'image directe. Faisant ensuite tourner le petit miroir *autour de sa trace* à l'aide de la vis de rectification, on amènera ainsi Op sur OP, et ce résultat sera atteint lorsque B''_1 coïncidera avec B.

Il faut bien remarquer que si le grand miroir n'est qu'approximativement rectifié, l'établissement de la coïncidence ne rend pas le petit miroir perpendiculaire au limbe; mais il est du moins rigoureusement paral-

lèle au grand d'après le n° 129, et par suite les deux miroirs ont la même inclinaison.

Pour opérer la rectification du petit miroir, on se sert d'un point éloigné quelconque, mais bien net (étoile, pointe de clocher, etc.); on peut aussi employer le disque du Soleil et même l'horizon de la mer. Dans ce dernier cas, si le petit miroir est incliné et que l'on tienne le sextant vertical, l'image d'un point B de l'horizon se faisant sur une perpendiculaire au limbe lorsque les traces des miroirs sont parallèles, le point B″ est sur l'horizontale de B et l'image directe de la ligne d'horizon coïncide avec son image réfléchie. Si l'on serre à ce moment la vis de pression et si l'on incline fortement le plan du limbe, on voit la ligne d'horizon se dédoubler, et la rectification s'obtient en rétablissant la coïncidence à l'aide de la vis *ad hoc* placée derrière le petit miroir.

Erreurs du sextant.

131. 1° **Lunette. — Mise au point.** — Une mise au point imparfaite rend indécis les contours apparents des images et occasionne des erreurs de pointé.

Les fils du réticule doivent paraître noirs et très nets. S'il n'en est pas ainsi, il faut retirer d'abord le porte-oculaire du tube de la lunette, enlever les verres de l'oculaire et repousser le diaphragme porte-réticule franchement au delà de sa position normale. Remettre ensuite les verres, regarder à travers l'oculaire et pousser le diaphragme en sens inverse du mouvement pri-

mitif jusqu'à ce que l'image du réticule soit très nette. Pour pousser le diaphragme, on peut se servir du tube qui porte le verre de champ : c'est un moyen sûr pour ne pas risquer de briser les fils.

Effectuer la mise au point en appuyant la lunette contre un obstacle fixe, pour la diriger sur un objet très éloigné. Les barreaux d'une grille, une croix surmontant un clocher, le disque de la Lune ou celui du Soleil et particulièrement les taches de ce dernier conviennent très bien pour une mise au point exacte. Enfoncer ou tirer le porte-oculaire jusqu'à ce que l'image de l'objet visé soit très nette.

Une fois la mise au point obtenue, faire une marque sur le tube porte-oculaire, en suivant le contour du tube principal de la lunette. Cette marque sert à retrouver immédiatement le point dans la suite.

132. **Inégale intensité des images.** — Une autre cause d'erreur dans les pointés est la différence d'éclat des images à mettre en contact.

La monture de la lunette permet un mouvement de l'axe optique, parallèlement à lui-même, dans une direction perpendiculaire au plan du limbe. En élevant ou en abaissant le porte-lunette, l'on diminue ou l'on augmente la portion de l'objectif qui reçoit les rayons réfléchis, tandis que la partie qui reçoit les rayons directs varie en sens inverse : il est donc possible de faire varier l'intensité des images. Lorsque par ce moyen on ne peut arriver à égaliser les éclats, il faut atténuer celui de l'image la plus brillante par l'interposition de verres colorés sur le passage des rayons. Enfin il est parfois nécessaire d'atténuer à la fois les

deux images : en ce cas on doit employer, si possible, une bonnette de préférence aux verres colorés.

133. **Déviation de l'axe optique.** — Soient O le centre optique de l'objectif, LL′ le grand cercle parallèle au limbe, OP la parallèle à l'axe de rotation et

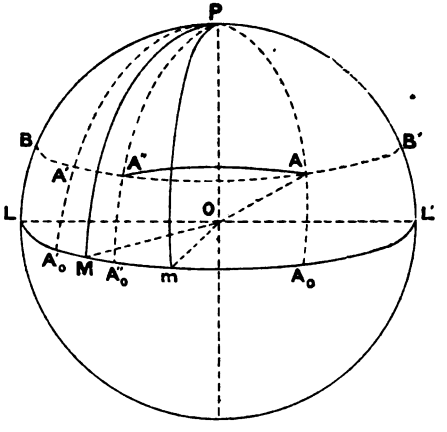


Fig. 28.

enfin PM, P*m* les grands cercles respectivement parallèles au grand et au petit miroir que nous supposons rectifiés, c'est-à-dire perpendiculaires à LL′.

Soit OA l'axe optique, incliné sur le limbe de l'angle $AA_0 = i$.

Prenons $mA'_0 = mA_0$ et $MA''_0 = MA'_0$. D'après cette construction, le point A''_0 du limbe a son image doublement réfléchie dans la direction OA_0; par suite, la lecture de l'index, corrigée de la collimation, fait con-

naître l'arc $A_0A''_0$, distance angulaire des points A_0 et A''_0 (n° 124). On a d'ailleurs :

$$A_0A''_0 = mA_0 + mA''_0 = mM + MA'_0$$
$$+ mM - MA''_0 = 2mM.$$

Ce qui prouve que l'arc $A_0A''_0$ est double de l'arc Mm qui mesure l'angle des miroirs, propriété déjà connue (n° 124).

Traçons le petit cercle BB′ parallèle au limbe et passant en A. Menons les grands cercles PA'_0, PA''_0 qui rencontrent BB′ aux points A′ et A″. Les points A, A′, A″, sont symétriquement placés par rapport aux miroirs de la même manière que A_0, A'_0, A''_0 qui leur correspondent.

Le point A″ a donc son image doublement réfléchie en A, c'est-à-dire sur l'axe optique.

Ainsi, dans la lunette, le point A de l'espace paraît en coïncidence avec l'image doublement réfléchie du point A″ ; l'angle de ces deux points est mesuré par l'arc de grand cercle AA″, tandis que l'instrument donne la valeur de l'arc $A_0A''_0 = 2Mm$.

Posons $\theta = AA''$, $\theta_0 = A_0A''_0$. Dans le triangle PAA″ on a :

$$\cos\theta = \cos PA \cos PA'' + \sin PA \sin PA'' \cos A''PA.$$
$$(2)\quad \cos\theta = \sin^2 i + \cos^2 i \cos\theta_0.$$

Appelons c_0 la correction à apporter à l'angle observé θ_0 pour avoir l'angle exact θ.

On a :

$$\theta = \theta_0 + c_0,$$
$$\cos\theta = \cos\theta_0 \cos c_0 - \sin\theta_0 \sin c_0,$$

ou, en supposant c_0 assez petit pour pouvoir en négliger les puissances supérieures à la première :

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - c_0 \sin\theta_0.$$

L'équation (2) donne alors :

$$\cos\theta_0 - c_0 \sin\theta_0 = \sin^2 i + \cos^2 i \cos\theta_0,$$

d'où, par une réduction facile :

$$c_0 = -\sin^2 i \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}.$$

Substituant le petit angle i à son sinus, et exprimant c et i en secondes d'arc, il vient enfin :

$$(3) \qquad c_0 = -i^2 \text{arc } 1'' \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}.$$

On voit que l'écart, toujours négatif, croît en valeur absolue avec θ_0.

Le procédé de rectification donné au n° 126 est assez précis lorsque, au lieu de marquer sur le mur un simple trait, on y place un carton sur lequel on a tracé un repère central entouré d'une circonférence dont on encadre l'image dans le carré du réticule : i atteint rarement 2′. Toutefois supposons $i = 5' = 300''$ et $\theta_0 = 120°$; on a $c = -0'',8$. Ainsi l'erreur systématique créée par une petite déviation de l'axe optique est pratiquement négligeable.

Mais ici se place une remarque importante.

Supposons que lors d'une mesure de distance angulaire l'on observe le contact non au centre du réticule ni sur une parallèle au limbe menée par ce point, mais dans une position voisine : ceci est à craindre à cause des petits mouvements que la main imprime à l'ins-

trument. Si l'on appelle i l'inclinaison de la ligne de visée sur le limbe, c'est-à-dire la distance du point de contact à la parallèle au limbe menée par le centre du carré, la formule (3) donne l'erreur commise. On peut arriver à prendre le contact toujours à l'intérieur du carré des fils; comme le côté de ce carré est en moyenne de 90′ à 100′, on voit que la limite de l'erreur possible n'est plus négligeable : pour $i = 50'$ les valeurs de c sont en effet $-16''$, $-37''$, $-75''$ lorsque θ_0 prend les valeurs 40°, 80°, 120°. Il est donc important d'observer aussi près que possible du fil idéal, parallèle au limbe et passant par le centre du réticule.

134. 2° **Miroirs. — Prismatisme.** — Le défaut de parallélisme des faces du grand miroir introduit dans les observations une erreur variable avec l'angle mesuré et, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle à l'angle des faces. Autrefois, cette erreur était loin d'être négligeable; aujourd'hui, les constructeurs sont en mesure de livrer des miroirs irréprochables à ce point de vue, eu égard au grossissement de la lunette. On devra donc faire changer tout grand miroir prismatique.

Pour mettre ce défaut en évidence, on regarde avec la lunette astronomique solidement appuyée l'image du soleil ou de la lune réfléchie par le grand miroir sous un angle d'incidence aussi grand que possible. Le bord du disque doit paraître très net; s'il est dédoublé, il y a du prismatisme, l'image donnée par la face antérieure ne coïncidant pas avec l'image principale (n° 120). On peut aussi employer pour cette véri-

fication l'image réfléchie d'un objet très éloigné qui présente une arête vive.

Le prismatisme du petit miroir est peu important, car les rayons lumineux le rencontrent toujours sous la même incidence : il en résulte une déviation constante qui, affectant la collimation, disparaît de l'angle corrigé.

135. **Inclinaison du grand miroir.** — Le petit miroir ayant été rectifié à l'aide du grand, nous devons supposer que les miroirs ont la même inclinaison (n° 130).

Pour plus de généralité, nous envisagerons le cas d'une rectification imparfaite de l'axe optique ou, ce qui revient au même, d'un contact observé hors du fil idéal parallèle au limbe et passant par le centre du réticule.

On établit très simplement la formule de l'erreur par la méthode suivante, due au capitaine de frégate Jeanniot.

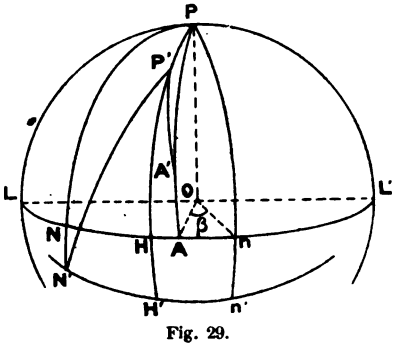


Fig. 29.

Soient LL' le plan du limbe, OP la parallèle à l'axe de rotation menée par le centre optique, OA l'axe optique, ON la normale au grand miroir (en avant de la face réfléchissante) et O*n* la normale au petit miroir (en arrière de la face réfléchissante).

Inclinons l'axe optique en amenant A en A', dans le grand cercle perpendiculaire au limbe, et appelons i_1 l'inclinaison AA' comptée positive ou négative selon que A' est au-dessus ou au-dessous du limbe.

Inclinons de même les miroirs en les faisant tourner autour de leurs traces; N vient en N' et n en n' dans les grands cercles PN et Pn.

D'après l'hypothèse, on a $NN' = nn'$. Appelons i_2 cette inclinaison commune des normales sur le plan du limbe, en la comptant positive ou négative selon que les points N' et n' sont au-dessus ou au-dessous de LL'. Dans le cas de la figure on a $i_2 = -NN' = -nn'$.

Supposons maintenant que l'on veuille mesurer l'angle θ de deux objets dont les images coïncident en A', l'une étant l'image directe du premier et l'autre l'image doublement réfléchie du second objet.

La lecture de l'index, corrigée de la collimation, fait connaître l'angle observé θ_0, double de celui dont la trace du grand miroir a tourné depuis le point de parallélisme; ce dernier angle est égal à l'arc Nn qui s'étend entre les projections des normales sur le limbe. On a donc $\theta_0 = 2\,Nn$.

Menons l'arc de grand cercle N'n', et soit α l'inclinaison de OA' sur ce plan. D'après le n° 133, l'angle cherché θ est égal au double de l'arc N'n' (angle des miroirs) corrigé de la quantité c_0 donnée par la formule (3) dans laquelle on remplace i par α :

$$\theta = 2N'n' - \alpha^2 \text{ arc } 1'' \text{ tg } N'n'.$$

D'autre part, si nous appelons c' la différence (N'n' — Nn), nous avons :

$$2N'n' = 2Nn + 2c' = \theta_0 + 2c',$$

et par suite :

$$\theta = \theta_0 + 2c' - \alpha^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2} + c'\right).$$

Il vient ainsi, en désignant par c la différence $(\theta - \theta_0)$:

$$(4) \qquad c = 2c' - \alpha^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_0}{2} + c'\right).$$

Nous allons exprimer c' et α en fonction des inclinaisons i_1 et i_2.

On a d'abord, dans le triangle N'Pn' :

$$\cos N'n' = \sin^2 i_2 + \cos^2 i_2 \cos \frac{\theta_0}{2},$$

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{2} + c'\right) = \sin^2 i_2 + \cos^2 i_2 \cos \frac{\theta_0}{2};$$

d'où l'on tire aisément, en négligeant les puissances de c' supérieures à la première :

$$c' = -i_2^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{4},$$

ce qui donne, en substituant dans (4) et en supprimant les termes du quatrième ordre et au-dessus :

$$(5) \quad c = -2i_2^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{4} - \alpha^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2},$$

et il nous reste à trouver l'expression de α. A cet effet, menons le grand cercle bissecteur de l'angle NPn. Ce grand cercle bissecte les arcs Nn et N'n' en H et H' et contient le pôle P' du grand cercle N'n'. Achevons les triangles sphériques PP'N' et PP'A'. On a :

$$\cos P'A' = \cos PP' \cos PA' + \sin PP' \sin PA' \cos HA,$$

ou, en appelant, comme au n° 130, β l'angle nOA

formé par l'axe optique et la normale au petit miroir lorsque l'instrument est rectifié :

$$\sin\alpha = \cos PP' \sin i_1 + \sin PP' \cos i_1 \cos\left(\frac{\theta_0}{4} - \beta\right);$$

d'où l'on tire, en négligeant les termes du troisième ordre :

$$\alpha = i_1 + PP' \cos\left(\frac{\theta_0}{4} - \beta\right).$$

On a aussi, dans le triangle PP'N' :

$$\cos P'N' = \cos PN' \cos PP' + \sin PN' \sin PP' \cos NH,$$

$$0 = \sin i_2 \cos PP' + \cos i_2 \sin PP' \cos\frac{\theta_0}{4};$$

ou, à la même approximation que plus haut

$$0 = i_2 + PP' \cos\frac{\theta_0}{4}.$$

En éliminant PP', il vient :

$$\alpha = i_1 - i_2 \frac{\left(\cos\frac{\theta_0}{4} - \beta\right)}{\cos\frac{\theta_0}{4}}.$$

Remplaçant dans (5) et réduisant, on a enfin .

$$(6) \qquad c = -i_1^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2}$$

$$- 2i_2^2 \operatorname{arc} 1'' \operatorname{tg}\frac{\theta_0}{4}\left[1 + \cos^2\left(\frac{\theta_0}{4} - \beta\right)\operatorname{séc}\frac{\theta_0}{2}\right]$$

$$+ 4i_1 i_2 \operatorname{arc} 1'' \sin\frac{\theta_0}{4} \cos\left(\frac{\theta_0}{4} - \beta\right)\operatorname{séc}\frac{\theta_0}{2}.$$

Le maximum de la valeur absolue de c a lieu, toutes choses égales d'ailleurs, quand i_1 et i_2 sont de signes contraires. Pour simplifier l'écriture posons :

$$c = c_1 + c_2 + c_3.$$

Comme on a toujours :

$$\theta_0 < 145^\circ \quad \text{et} \quad \beta = 15^\circ \text{ environ},$$

les quantités c_1, c_2 et c_3 augmentent, en valeur absolue, quand θ_0 croît.

Les procédés de rectification permettent d'assurer le parallélisme de l'axe optique et la perpendicularité du grand miroir à moins de 5′ près ; en prenant $i_1 = -i_2 = 300''$, on a :

θ_0	c_1	c_2	c_3
40°	— 0″,2	— 0″,3	— 0″,3
80	— 0 ,4	— 0 ,7	— 0 ,8
120	— 0 ,8	— 1 ,5	— 1 ,7

Il résulte de ces nombres que l'erreur c provenant d'une rectification imparfaite est toujours négligeable. Mais si l'on observe le contact en dehors de la parallèle au limbe menée par le centre du réticule, les termes c_1 et c_3 croissent avec l'écart i_1, comme on l'a déjà fait remarquer au n° 133 pour le premier d'entre eux; le terme c_1, en effet, n'est autre que la quantité c_0 de la formule (3) à laquelle c se réduit lorsqu'on suppose les miroirs rectifiés, c'est-à-dire

$$i_2 = 0.$$

136. 3° **Graduation**. — *Excentricité*. — On distingue deux sortes d'excentricités : 1° l'excentricité fluctuante, provenant du jeu inévitable de l'axe matériel de l'alidade dans sa crapaudine ; dans un instrument neuf cette cause d'erreur est généralement peu importante, mais elle peut n'être plus négligeable par suite de l'usure, si le jeu n'est pas repris; 2° l'excentricité proprement dite, due à ce que l'axe géométrique de l'alidade, par suite d'un mauvais centrage, ne coïncide pas avec le centre de la graduation. Ce défaut se rencontre fréquemment, car il est bien difficile de construire un sextant qui en soit absolument exempt : sur plusieurs centaines de sextants et d'octants étudiés par l'Observatoire de la marine à Hambourg, 20 % seulement donnaient des indications à peu près correctes, 30 % ne présentaient pas d'écart supérieur à 1′ et quelques-uns avaient jusqu'à 3′ et 4′ d'erreur pour des angles de 80°.

Il faut donc se préoccuper de connaître la correction à apporter à une lecture pour en conclure l'angle exact.

Soient C le centre de la graduation dont l'origine est en O, B_0 la position de l'index (extrémité intérieure du trait *zéro* du vernier) au point de parallélisme, A le pivot de l'alidade et B une position quelconque de l'index en coïncidence avec la division *b*B du limbe.

On a :

Angle cherché. . . .	$\theta = 2B_0AB$
Angle lu	$l = 2OCB$
Collimation	$\varepsilon = +2OCB_0$.

Soit u l'angle OCM, le point M étant obtenu sur la circonférence du limbe en prolongeant CA de C vers A. Nous compterons u de o à 2π dans le sens rétrograde,

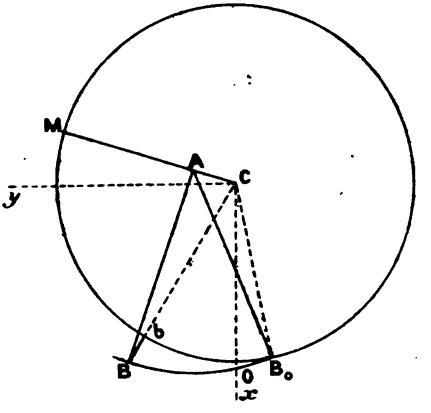


Fig. 30.

c'est-à-dire dans le sens des graduations. Cela posé, on a sur la figure :

$$B_0AB = B_0AM - BAM,$$

$$OCB = OCM - BCM = B_0CM - OCB_0 - BCM;$$

d'où $B_0AB - OCB = B_0AM - B_0CM + OCB_0 - (BAM - BCM),$

ou $$\frac{\theta}{2} - \frac{l}{2} = CB_0A + \frac{\varepsilon}{2} - CBA,$$

ce qui donne :

$$\theta = l + \varepsilon + 2(CB_0A - CBA).$$

On a aussi, en posant $CA = e$:

$$\frac{\sin CB_0A}{\sin B_0CM} = \frac{e}{AB_0}, \qquad \frac{\sin CBA}{\sin BCM} = \frac{e}{AB};$$

d'où, en désignant par r la distance AB_0 ou AB de l'index au pivot :

$$\sin CB_0A = \frac{e}{r}\sin\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\sin CBA = \frac{e}{r}\sin\left(u - \frac{l}{2}\right).$$

Les angles CB_0A et CBA étant très petits, nous les substituerons à leurs sinus, et nous aurons :

$$CB_0A = \frac{e}{r}\sin\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$CBA = \frac{e}{r}\sin\left(u - \frac{l}{2}\right),$$

ce qui donne enfin, en prenant pour unité la seconde d'arc :

(5)

$$\theta = l + \varepsilon + \frac{2}{\text{arc } 1''}\cdot\frac{e}{r}\left[\sin\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\left(u - \frac{l}{2}\right)\right].$$

Mais on a :

$$\sin\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \sin\left(u - \frac{l}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(u - \frac{l-\varepsilon}{4}\right)\sin\frac{l+\varepsilon}{4}$$

$$= 2\sin\frac{l+\varepsilon}{4}\left[\cos u\cos\frac{l-\varepsilon}{4} + \sin u\sin\frac{l-\varepsilon}{4}\right],$$

et par suite :

$$\theta = l + \varepsilon + \frac{4}{\text{arc } 1''} \frac{e}{r} \sin \frac{l+\varepsilon}{4} \left(\cos u \cos \frac{l-\varepsilon}{4} + \sin u \sin \frac{l-\varepsilon}{4} \right).$$

Rapportons le pivot A à deux axes rectangulaires Cy, Cx dont les directions positives sont tracées sur la figure, l'axe des x passant par l'origine O de la graduation. Les coordonnées X, Y du point A nous sont données par les équations

$$Y = e \sin u, \qquad X = e \cos u.$$

Posant alors :

$$y = \frac{4}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{Y}{r}, \qquad x = \frac{4}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{X}{r},$$

il viendra :

$$(6) \qquad \theta = l + \varepsilon + \sin \frac{l+\varepsilon}{4} \left(x \cos \frac{l-\varepsilon}{4} + y \sin \frac{l-\varepsilon}{4} \right).$$

Cette équation est linéaire par rapport à x et à y, quantités proportionnelles aux coordonnées du point A et pouvant être, par suite, considérées comme variables indépendantes.

Pour déterminer les valeurs les plus probables de x et de y, on observe au sextant un certain nombre d'angles différents l_1, l_2, ... l_n dont les valeurs exactes θ_1, θ_2, ... θ_n sont connues, et on écrit pour chaque observation l'équation de condition (6); on traite ensuite

l'ensemble des équations par la méthode des moindres carrés.

Une fois x et y connus, on calcule $\frac{e}{r}$ et u par les équations qui précèdent, et l'on peut dresser deux tableaux donnant à vue les deux termes

$$\frac{2}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{e}{r} \sin\left(u + \frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \text{et} \quad \frac{-2}{\text{arc } 1''} \frac{e}{r} \sin\left(u - \frac{l}{2}\right)$$

de l'équation (5), le 1er avec ε comme argument, le 2e en fonction de l. Mais comme ε est toujours petit et peut être rendu aussi petit que l'on veut, que d'autre part le facteur $\frac{2}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{e}{r}$ est ordinairement inférieur à 100″, le 1er terme est pratiquement constant et il suffit de reporter sa valeur moyenne $\frac{2}{\text{arc } 1''} \frac{e}{r} \sin u$ sur les nombres du 2e tableau. La correction d'excentricité est ainsi donnée, en définitive, par un seul tableau ayant pour argument la lecture l et calculé par la formule

$$(7) \quad c = \frac{2}{\text{arc } 1''} \frac{e}{r} \left[\sin\left(\frac{l}{2} - u\right) + \sin u \right].$$

137. **Erreurs de division.** — La théorie qui précède suppose non seulement le sextant bien rectifié, mais encore la graduation rigoureusement exacte.

Si cette dernière condition n'est pas remplie, il faut ajouter au 2e membre de l'équation (5) une correction pour tenir compte de l'erreur de division.

Cette correction peut s'exprimer par la série de

Fourier en fonction de l'angle $\frac{l}{2}$ décrit par l'index

$$c' = \alpha \sin\left(\frac{l}{2} - A\right) + \beta \sin 2\left(\frac{l}{2} - B\right) + \gamma \sin 3\left(\frac{l}{2} - C\right) + \dots$$

On voit par la formule (7) que le 1er terme peut se confondre avec le terme variable de l'excentricité; si les termes suivants ne sont pas négligeables, on s'en aperçoit en ce que les observations sont mal représentées par les équations de condition du n° 136, les résidus dépassant les erreurs admissibles et affectant une allure systématique. On pourrait, en ce cas, essayer de tenir compte du terme ou des deux termes suivants de la série; mais si les observations étaient assez régulièrement distribuées le long du limbe, il serait plus simple et suffisant de recourir à la méthode graphique.

Chaque observation peut être, en effet, représentée par un point ayant pour coordonnées la lecture l et la correction $c'' = \theta - (l + \varepsilon)$; en faisant passer une courbe continue le mieux possible par l'ensemble des différents points ainsi obtenus, on détermine graphiquement la fonction $c'' = f(l)$.

138. **Erreurs de flexion.** — Dans ce qui précède, nous avons admis que la vraie valeur des angles observés au sextant était connue. Voyons donc comment l'on peut se procurer ces angles.

On conseille généralement de choisir des points bien nets près de l'horizon et de mesurer leurs distances à l'aide d'un instrument éprouvé, ou encore au moyen

d'un théodolite qui en donne les valeurs réduites à l'horizon. On peut aussi observer des distances d'étoiles; en appliquant aux coordonnées tirées de la Connaissance des Temps les corrections de réfraction, on calcule aisément les distances apparentes. Enfin certains constructeurs, MM. Ponthus et Therrode notamment, déterminent les corrections de leurs sextants à l'aide d'un instrument construit spécialement pour cet objet.

Pour que les résultats soient corrects, il est nécessaire de tenir compte de la flexion, qui est loin d'être négligeable. L'erreur de flexion dans le sextant a été signalée pour la première fois par l'amiral Perrin : « On peut constater son existence en mettant en contact les deux images d'un astre peu élevé sur l'horizon; il est rare que le contact subsiste quand on fait tourner le sextant de 180° autour de la lunette; ou quand on vise ensuite une étoile voisine du zénith, et la différence peut atteindre 20″ à 30″. »

Or, si l'on excepte les distances lunaires qui ne s'observent plus actuellement, les seules mesures de précision à effectuer au sextant sont les hauteurs à l'horizon artificiel, pour lesquelles le plan du limbe est orienté de la même manière dans un plan vertical lorsque la hauteur reprend la même valeur. Si donc on veut éliminer les erreurs de flexion, il convient de déterminer les corrections en observant précisément dans ces conditions. On y parvient par l'application de la méthode des hauteurs égales d'étoiles, ou, plus simplement, en observant des séries de hauteurs circuméridiennes d'étoiles à l'horizon à mercure, comme le recommande l'amiral Perrin. On exprime l'angle θ en fonction de

la latitude L, de la déclinaison (D), de la réfraction R et de la réduction au méridien ρ; si même la valeur exacte de la latitude est inconnue, on peut la représenter par $(L + dL)$ et l'on a, pour un passage supérieur par exemple :

$$\theta = 2R - 2\rho + 180^\circ \mp 2(L + dL - (D),$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que le passage a lieu au sud ou au nord du zénith. Il ne reste plus qu'à remplacer θ par cette valeur dans l'équation (6); on introduit ainsi une nouvelle inconnu dL dont on détermine, par surcroît, la valeur la plus probable.

139. 4° **Verres colorés**. — Les verres colorés doivent avoir leurs faces parallèles. On s'en assure en établissant, à travers une combinaison convenable de ces verres, le contact entre les bords des deux images du Soleil. Le sextant doit être appuyé contre un obstacle fixe, afin que l'on puisse apprécier très exactement le contact; celui-ci établi, on fait tourner successivement chacun des verres de 180° dans sa monture, et si la coïncidence est détruite après l'une de ces rotations, le verre correspondant est prismatique et doit être rejeté.

Lorsque les verres colorés ne peuvent tourner dans leur monture, il est néanmoins possible d'opérer comme ci-dessus; le changement de position du verre à examiner s'obtient en dévissant son support et en le remettant en place après avoir retourné le verre face pour face. Cela revient, pour le petit miroir, à faire tourner le verre de 180° autour d'un axe perpendiculaire au

plan du limbe; pour le grand miroir, à faire tourner le verre de la même façon, en lui donnant, de plus, une rotation de 90° dans son plan.

Usage du sextant.

140. **Mesure de la collimation.** — La manière la plus précise de rectifier le petit miroir et, en même temps, d'obtenir la collimation est d'opérer avec une étoile de 3e grandeur environ, assez peu élevée sur l'horizon, en appuyant le pied antérieur du limbe sur un support fixe. La rectification faite, quelques pointés successivement exécutés sur la même étoile font connaître, par leur moyenne, une valeur très exacte de la collimation.

Le jour on peut employer un objet très éloigné et très net, tel qu'un paratonnerre, ou encore l'horizon de la mer lorsqu'il est bien net.

On peut aussi attendre de bons résultats du procédé qui consiste à mettre successivement en contact les deux bords des images du Soleil. En ce cas, en appelant l_g et l_d les valeurs absolues respectives des lectures à gauche et à droite du zéro, on a $\varepsilon = \frac{1}{2}(l_d - l_g)$ et $\delta = \frac{1}{4}(l_d + l_g)$, δ étant le demi-diamètre du Soleil : en comparant la valeur obtenue à celle tirée de la *Connaissance des Temps*, on a une vérification. Faire plusieurs mesures et en prendre la moyenne.

141. **Réduction de la collimation.** — Une vis horizontale permet de faire tourner le petit miroir

autour d'un axe sensiblement perpendiculaire au plan du limbe. Par suite, si après avoir fixé l'index au zéro du limbe, on amène en coïncidence, au moyen de cette vis, les deux images d'un point éloigné, les miroirs deviennent parallèles et la collimation est annulée. Toutefois cette opération dérange ordinairement un peu la perpendicularité du miroir; il faut donc reprendre la rectification avant de mesurer la valeur résiduelle de la collimation.

142. **Mesure de l'angle de deux points.** — Du centre optique O de l'objectif décrivons une sphère de rayon quelconque, et soient A et B les traces des rayons aboutissant aux points à observer.

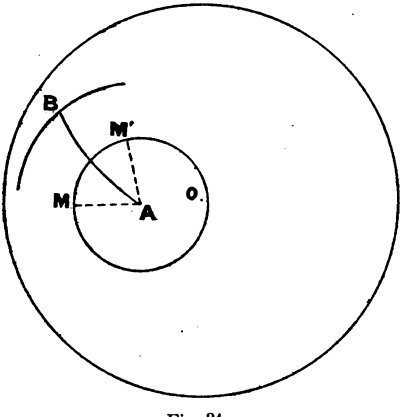


Fig. 31.

Tenant la poignée de l'instrument de la main droite, on oriente le limbe à peu près dans le plan OAB, puis on vise directement le point de gauche A si ce plan est peu incliné sur l'horizon, ou l'objet inférieur si l'inclinaison est grande.

La manœuvre de l'instrument est ainsi plus facile; cependant, s'il y avait une grande différence d'éclat

entre les deux objets, il serait préférable de viser directement le moins lumineux.

Lorsque l'index marque l'angle $(AM - \varepsilon)$[1], l'angle des miroirs est $\frac{AM}{2}$, et les seuls points dont les images doublement réfléchies puissent coïncider au centre du réticule avec l'image directe A sont répartis sur un petit cercle ayant AM pour rayon sphérique; si donc l'observateur *balance* l'instrument à droite et à gauche du plan AB en conservant la ligne de visée OA sur l'axe optique, tous les points de la région MM′ du petit cercle viennent successivement faire leur image en A.

En augmentant doucement et progressivement l'angle d'ouverture de l'index, le rayon du petit cercle augmente, et lorsqu'il a une valeur voisine de AB, on voit tout à coup, pendant le balancement, l'image du point B traverser le champ. On serre alors la vis de pression, et à l'aide de la vis de rappel, on achève de donner à l'index une position telle que la trajectoire de l'image de B traverse exactement celle du point A. Il ne reste plus qu'à faire la lecture.

143. Il est essentiel de vérifier ou d'observer le contact après avoir abandonné la vis de rappel, car l'alidade subit généralement un léger déplacement, par suite de l'élasticité du métal, lorsqu'on cesse d'agir sur la vis.

Pour dégrossir le contact, il est bon d'opérer à l'œil nu en regardant à travers le porte-lunette. On aperçoit

[1] Abstraction faite de la correction d'excentricité.

ainsi plus facilement l'image réfléchie, le champ de visée dans la partie étamée du petit miroir étant beaucoup plus étendu que celui de la lunette. C'est aussi dans le but de faciliter la recherche de l'image réfléchie qu'il a été prescrit plus haut de viser directement l'objet le moins éclairé ; lorsque le contact approché a été établi, on visse la lunette et on revient, s'il y a lieu, à la position normale d'observation, en visant directement l'objet de gauche ou l'objet inférieur.

144. **Mesure d'une hauteur à l'horizon de la mer.** — Si d'un point O, élevé de quelques mètres au-dessus de la mer, on mène des tangentes à la surface dans divers azimuts, ces tangentes forment le même angle avec la verticale, car l'effet de l'aplatissement est insensible pour une faible élévation. D'autre part, la réfraction est généralement la même pour tous les points de même distance zénithale, de sorte que la ligne apparente d'horizon semble détacher sur une sphère décrite du point O un petit cercle HH′ parallèle à l'horizon vrai.

Soient Z le zénith et A la projection perspective d'un astre sur la sphère O.

On nomme *hauteur observée* de l'astre A l'arc AB s'étendant depuis cet astre jusqu'à la ligne d'horizon, dans le vertical ZA : c'est donc la plus courte distance angulaire de l'astre au petit cercle HH′.

Pour mesurer AB, l'observateur vise un point M de l'horizon dans le voisinage du vertical, puis il amène l'image réfléchie de A dans la direction OM, comme s'il s'agissait de prendre l'angle AM (n° 142). Lorsque l'astre observé est le Soleil ou la Lune, il n'y a aucune

difficulté ; mais pour une étoile, on risque de confondre l'image réfléchie avec celle d'une étoile voisine : aussi convient-il d'opérer différemment pour amener l'image de l'astre à l'horizon.

Après avoir placé l'index de l'alidade au voisinage du zéro, on vise directement l'étoile, et l'on voit les deux images dans le champ ; on fait ensuite mouvoir

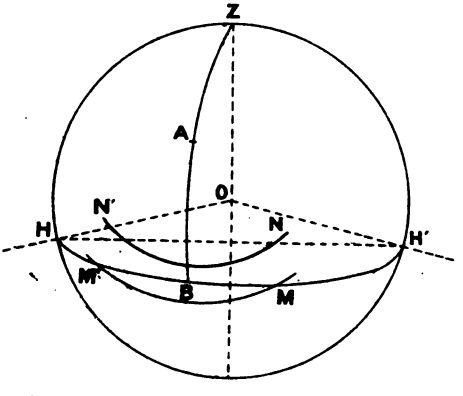


Fig. 32.

doucement l'alidade, en inclinant l'instrument dans un plan vertical, de manière à conserver constamment l'image réfléchie dans le champ, et l'on continue ce mouvement jusqu'à ce que l'image directe de la ligne d'horizon apparaisse. On serre la vis de pression lorsque l'image de l'étoile se trouve sur cette ligne.

L'image de l'astre étant amenée à l'horizon, l'observateur *balance* l'instrument de manière à faire parcourir à l'axe optique la région MB, *tout en maintenant l'image réfléchie de l'astre au centre du réticule :* l'axe optique

ne peut ainsi décrire que le petit cercle MM′ de pôle A et de rayon sphérique AM. L'image de l'astre paraît donc plonger dans la mer, en décrivant un arc de cercle.

Si l'on vient à diminuer l'angle d'ouverture de l'index, le rayon AM diminue et il en est de même de l'amplitude de l'arc immergé MM′ : lorsque cet arc se réduit à zéro, le petit cercle tangente HH′ en B et l'angle donné à cet instant par l'instrument est précisément la hauteur cherchée.

Le mouvement de *balancement* est ici plus compliqué qu'au n° 142 ; tandis que l'axe optique décrit un cône autour de OA, le plan du limbe est orienté de manière à passer constamment par cette droite. Mais cette manœuvre est instinctive et ne présente pas de difficultés.

Pour les mêmes raisons qu'au n° 143, il ne faut pas toucher à la vis de rappel au moment du contact; si donc le mouvement en hauteur est ascensionnel, on doit immerger *légèrement* l'astre et attendre, tout en balançant l'instrument, que l'arc MM′ se réduise de lui-même à zéro. Au contraire, si l'astre descend, il faut diminuer l'angle de l'index jusqu'à ce que l'arc NN′ décrit par l'image soit tout entier au-dessus de l'horizon et attendre que le contact se produise de lui-même.

Dans le cas d'une grande hauteur, la trajectoire de l'image coupe la ligne d'horizon sous un angle d'autant plus petit que l'astre est plus voisin du zénith; on doit alors faire parcourir à l'axe optique une grande région de l'horizon pour apprécier convenablement la direction du point le plus bas de la trajectoire.

Lorsque l'astre présente un diamètre apparent, on

prend le contact de l'un de ses bords, supérieur ou inférieur, avec l'horizon. Pour la Lune, il faut évidemment employer le bord bien terminé.

145. **Lunettes de nuit.** — Pour faciliter la mesure des hauteurs d'étoiles à l'horizon de la mer, l'amiral Fleuriais a fait construire une lunette spéciale qui doit être considérée comme un complément indispensable du sextant. Cette lunette a un objectif de 40^{mm} d'ouverture et un grossissement de 5. La clarté est égale à l'unité, le diamètre de l'anneau oculaire étant 8^{mm}, nombre admis pour le maximum du diamètre de la pupille pendant la nuit. Enfin le champ (9°) a été rendu aussi grand que possible, l'expérience ayant montré qu'un segment de ligne peu éclairée (horizon de la mer) est d'autant plus visible que sa longueur est plus grande.

Le commandant de Magnac a imaginé d'accoler deux lunettes astronomiques, afin de substituer, en ce qui concerne l'horizon, la vision binoculaire à la vision monoculaire. L'avantage de ce procédé est contestable; quoi qu'il en soit, cet appareil, tel qu'il a été réalisé, nous paraît inférieur à la lunette Fleuriais.

Pour faciliter l'appréciation du contact, on a proposé, en outre, l'interposition d'une lentille cylindrique (Laurent) ou d'un prisme biréfringent (Fleuriais) entre les deux miroirs. Dans le premier dispositif, l'image de l'étoile est transformée en une ligne lumineuse, perpendiculaire au limbe, que l'on s'attache à faire coïncider avec l'horizon; dans le second, l'image est dédoublée parallèlement au limbe, et l'observation consiste à bissecter ce couple par l'horizon.

CHAPITRE III

CORRECTION DES HAUTEURS

146. **Dépression moyenne apparente de l'horizon de la mer.** — Soit O l'œil d'un observateur élevé de $OM = e$ au-dessus de la surface du globe supposé sphérique et de rayon $CM = \rho$.

On sait que tout rayon lumineux issu d'un point N de la surface MN de la mer et aboutissant au point O affecte une forme curviligne, par l'effet de la réfraction atmosphérique. La concavité de la courbe est tournée vers le centre C, et l'on admet que l'arc ON se confond avec son cercle osculateur, si OM est petit devant ρ. De plus, les angles égaux TON, TNO formés par la corde ON avec les tangentes extrêmes sont proportionnels à l'angle ω des verticales des extrémités. L'expérience apprend que la valeur moyenne du coefficient de proportionnalité γ est 0,08; mais ce coefficient est variable avec la température, la pression et l'état hygrométrique de l'air.

Le rayon lumineux issu de N parvient en O sans être arrêté par la surface de la mer, si l'angle TNC

n'est pas inférieur à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si l'on a :

$$ONM + \gamma\omega + \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} \geqq \frac{\pi}{2},$$

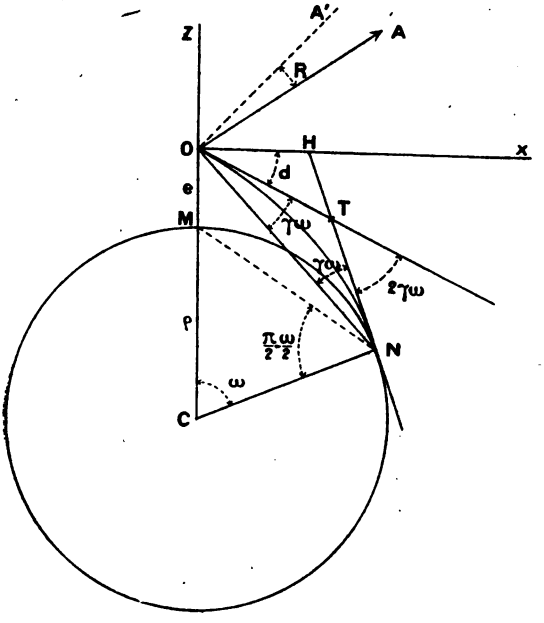


Fig. 33.

ou $$ONM \geqq \omega\left(\frac{1}{2} - \gamma\right).$$

Quand l'arc ON est tangent au cercle, on a évidemment $ONM = \omega\left(\frac{1}{2} - \gamma\right)$; or si le point N se rap-

proche de M, l'angle ONM augmente constamment et ω diminue ; par suite, l'inégalité se trouve satisfaite. Le contraire a lieu si le point N s'éloigne ; donc la position de tangence est la limite de visibilité de la surface, et la ligne d'horizon paraît dans la direction de la tantangente OT à l'arc ON. L'angle $d = x\mathrm{OT}$ de cette tangente avec l'horizontale Ox se nomme *dépression apparente de l'horizon* pour le point O.

Nous allons établir très simplement, d'après M. d'Ocagne[1], la formule donnant d en fonction de e.

Ox et HN étant respectivement perpendiculaires à CO et CN, on a $\mathrm{TH}x = \omega$; d'autre part, l'angle OTH, extérieur au triangle OTN, est égal à $2\gamma\omega$. On a donc :

$$(1) \qquad d = \omega - 2\gamma\omega = (1 - 2\gamma)\,\omega.$$

On a aussi, sur la figure :

$$\mathrm{ONC} = \frac{\pi}{2} - \gamma\omega,$$

$$\mathrm{CON} = \frac{\pi}{2} - (d + \gamma\omega) = \frac{\pi}{2} - \omega\,(1 - \gamma),$$

et par suite :

$$\frac{\rho + e}{\rho} = \frac{\cos\gamma\omega}{\cos\omega(1 - \gamma)},$$

ou, en négligeant dans le 2e membre les quantités du 4e ordre :

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. IV (1904), p. 197.

$$1+\frac{e}{\rho}=\frac{1-\frac{1}{2}\gamma^2\omega^2}{1-\frac{1}{2}\omega^2(1-\gamma)^2}=1+\frac{(1-\gamma)^2-\gamma^2}{2}\omega^2$$

$$=1+\frac{1-2\gamma}{2}\cdot\omega^2;$$

d'où

$$\frac{e}{\rho}=\frac{1-2\gamma}{2}\omega^2, \quad \text{et} \quad \omega^2=\frac{2}{1-2\gamma}\cdot\frac{e}{\rho}.$$

En remplaçant, dans (1), ω par cette valeur, il vient : $$d=\sqrt{(1-2\gamma)\frac{2e}{\rho}},$$

ou enfin, en exprimant d en minutes d'arc :

$$d=\frac{1}{\text{arc } 1'}\sqrt{\frac{2(1-2\gamma)}{\rho}}\sqrt{e}.$$

Exprimant ρ et e en mètres, on a, en prenant $\gamma=0{,}08$ et $\rho=6367471$ mètres, rayon moyen de la Terre :

$$(2) \qquad d=1',773\sqrt{e}.$$

Cette formule a été mise en tables (T. VII, Guyou; T. XII, Friocourt; T. XV, Caillet).

147. **Réfraction astronomique.** — Pour la théorie de la réfraction, nous renvoyons aux traités d'Astronomie.

Un astre qui serait vu dans la direction OA s'il n'y avait pas d'atmosphère est aperçu en réalité dans la direction OA′, le rayon lumineux ayant changé de direction en traversant l'atmosphère. L'effet de la réfrac-

tion est de relever la direction OA d'un petit angle $AOA' = R$ dans le vertical ZOA, et l'on a :

$$R = \beta\tau\,(\mu \operatorname{cotg} h_r - \nu \operatorname{cotg}^3 h_r).$$

Dans cette formule, les facteurs β et τ dépendent respectivement de la hauteur barométrique et de la température de l'air ; h_r est la *hauteur apparente réfractée* de l'astre, complément de la distance zénithale réfractée ZOA' ou distance angulaire A'Ox de l'astre apparent à l'horizon apparent Ox. Enfin μ et ν sont des constantes qui ont pour valeurs :

$$\mu = 58'',320,$$

$$\nu = 0'',060.$$

Le terme $(\mu \operatorname{cotg} h_r - \nu \operatorname{cotg}^3 h_r)$ se nomme *réfraction moyenne* R_m. C'est la valeur de la réfraction pour $\beta = \tau = 1$, ce qui correspond à 760 millimètres et à $+10°$.

La réfraction moyenne est donnée par la Table I de la Connaissance des Temps en fonction de la hauteur apparente réfractée h_r ; les facteurs β et τ se prennent dans la Table II du même recueil.

On trouve aussi des tables de réfraction dans les recueils de Tables nautiques ; mais l'interpolation n'est pas toujours très facile lorsqu'il s'agit de tenir compte de la pression et de la température.

148. A la mer il est suffisant, au moins à partir de $h_r = 10°$, de substituer R_m à R. Pour les observations à terre (réglage des chronomètres), il est nécessaire de calculer exactement la réfraction. Nous donnons, à la

fin de cet Ouvrage, une table facilitant ce calcul. En posant : $\rho = \mu - \nu \operatorname{cotg}^2 h_r$,

on peut écrire : $R = \beta\tau\rho \operatorname{cotg} h_r$.

Le coefficient ν étant très petit, ρ varie assez lentement à partir de $h_r = 10°$.

La table donne les logarithmes de ρ, de β et de τ, et il suffit de prendre dans une table ordinaire le logarithme de cotg h_r. En employant 4 décimales, on obtient R à $0'',1$ près environ.

149. **Hauteur apparente.** — La hauteur apparente corrigée, ou simplement *hauteur apparente*, est l'angle AOx, distance angulaire de l'astre vrai à l'horizon apparent Ox. La hauteur apparente est le complément de la *distance zénithale apparente* ZOA.

Pour déduire cet élément de la hauteur prise à l'horizon de la mer à l'aide du sextant, on corrige d'abord l'angle lu (h_i, hauteur instrumentale) de la collimation et de l'excentricité. On a ainsi la hauteur observée h_o, définie au n° 144 :

$$h_o = h_i + \varepsilon + c.$$

En retranchant de h_o la valeur d de la dépression, on ramène cet angle à l'horizon apparent :

$$h_r = h_o - d.$$

Et enfin, en appliquant la correction de réfraction à ce dernier angle, on obtient la hauteur apparente h_a :

$$h_a = h_r - R.$$

D'après cela, on voit que l'on peut écrire :

(3) $$h_a = h_o - d - R.$$

150. **Hauteur vraie. Correction de parallaxe.** On sait que, pour un lieu déterminé de la surface du globe, la *parallaxe horizontale* d'un astre situé à la distance Δ du centre de la Terre a pour expression :

$$\varpi = \frac{r}{\Delta \operatorname{arc} 1''},$$

La valeur Π que prend ϖ pour $r = a$ est dite *parallaxe horizontale équatoriale :*

$$\Pi = \frac{a}{\Delta \operatorname{arc} 1''}$$

On a d'ailleurs (Introduction, n° III) :

$$r = a\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin^2 L\right),$$

et l'on en conclut :

$$\varpi = \Pi - \frac{1}{2}\Pi\varepsilon^2 \sin^2 L.$$

Pour la Lune seule, le terme en ε^2 est sensible; $\frac{1}{2}\Pi\varepsilon^2$ varie très peu autour de sa valeur moyenne qui correspond à $\Pi = 57'$ et l'on a :

$$\varpi = \mathbb{C}\,\Pi\,\mathbb{C} - 0',19 \sin^2 L.$$

151. Soient C le centre de la Terre, O un point de la surface et A un astre situé en dehors du méridien que nous prenons pour plan de la figure.

Sur la verticale OZ prenons vers le nadir une distance $OC' = OC = r$, et soit Δ' la distance C'A. Je dis que dans les formules des parallaxes on peut toujours substituer Δ' à Δ.

En effet, soit Π' la valeur de Π quand $\Delta = \Delta'$. On a :

$$\Pi' - \Pi = \frac{a}{\text{arc } 1''}\left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta}\right) = \frac{a}{\text{arc } 1''} \cdot \frac{\Delta - \Delta'}{\Delta\Delta'}.$$

La distance $CC' = u$ est légèrement inférieure à l'arc $CC' = rV$ dont elle est la corde. Or V, angle à la verticale, n'atteint pas 12′. On a donc :

$$u < rV < a \,.\, 12 \text{ arc } 1'.$$

D'autre part, le triangle CC'A donne $\Delta - \Delta' < u$, et par suite on peut écrire :

$$\Pi' - \Pi < \frac{720\, a^2}{\Delta\Delta'}.$$

Même pour la Lune, le 2e membre de l'inégalité est négligeable, car si l'on y remplace Δ et Δ' par la valeur moyenne $60\, a$ de la distance, on obtient :

$$\Pi' - \Pi < 0'',2.$$

Ainsi l'on peut toujours remplacer Δ par Δ'.

152. Considérons maintenant les sphères célestes des points C et C'.

Par le point C menons Cz parallèle à OZ. Le point z de la sphère géocentrique est l'image du zénith de l'observateur; on nomme *hauteur vraie*, h_v, de l'astre le complément de la distance zénithale géocentrique za. C'est la distance de la projection a de l'astre à l'horizon vrai qui n'a pas été tracé pour ne pas surcharger le dessin (Introduction, n° IV).

La droite C'A perce la sphère C' au point a'. Menons $C'a''$ parallèle à Ca; comme Cz est parallèle à $C'z'$, on a $za = z'a''$, et les points a', a'' ne sont distants que du

petit arc $a'a''$ mesurant l'angle $a'C'a''$ ou son égal CAC'. On a d'ailleurs, dans le triangle sphérique $z'a'a''$:

$$z'a'' - z'a' < a'a'',$$

ou

$$za - z'a' < a'a''.$$

153. Ainsi la distance zénithale géocentrique et l'arc $z'a'$ de la sphère C' ont entre eux une différence moindre

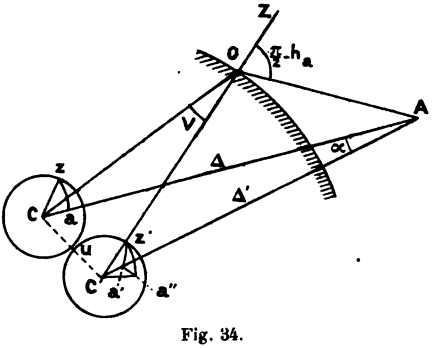


Fig. 34.

que l'angle CAC' sous lequel on voit de l'astre la distance $CC' = u$. Désignons par α cet angle CAC'. La valeur maximum α_m de α aura lieu lorsque l'on aura :

$$u = \Delta\alpha_m.$$

Mais on a aussi : $u = r\mathrm{V}$;

d'où $$\alpha_m = \frac{r}{\Delta}\mathrm{V}.$$

V ne dépasse pas 12'; comme $\frac{r}{\Delta}$ est très petit, α_m est en général inappréciable. Cependant, pour la

Lune, $\frac{r}{\Delta}$ est environ $\frac{1}{60}$, et α_m peut atteindre 0',2; mais pour les observations destinées à fournir une droite de hauteur, cette petite différence est négligeable.

154. Nous admettrons donc que α est nul; par suite, la hauteur vraie h_v sera le complément de l'arc $z'a'$ ou de l'angle ZC'A. D'ailleurs, le triangle OC'A donne :

$$ZC'A = ZOA - OAC',$$

$$\frac{\pi}{2} - h_v = \frac{\pi}{2} - h_a - OAC',$$

et, en posant $OAC' = P$, *parallaxe en hauteur*, il vient :

(4) $$h_v = h_a + P.$$

Pour calculer P, on a :

$$\frac{\sin OAC'}{\sin ZOA} = \frac{r}{\Delta'};$$

d'où $$\sin P = \frac{r}{\Delta'} \cos h_a.$$

Mais P étant toujours petit (1° au maximum, pour la Lune), on tire de cette équation :

(5) $$P = \frac{r}{\Delta' \text{arc } 1''} \cos h_a,$$

ou, en remplaçant Δ' par Δ (n° 151) :

$$P = \varpi \cos h_a.$$

En substituant Π à ϖ, il vient enfin :

(6) $$P = \Pi \cos h_a.$$

D'après le n° 150, cette formule est très exacte pour

le Soleil et les planètes ; pour la Lune, il faudrait ajouter le petit terme $(-0',19 \sin^2 L \cos h_a)$, mais on le néglige habituellement à la mer.

155. **Correction des hauteurs observées à l'horizon de la mer.** — Corriger une hauteur, c'est déduire de l'angle observé au sextant la hauteur vraie h_v définie au n° 152.

A l'angle lu, h_i, on applique d'abord les corrections de collimation et d'excentricité, ce qui fait connaître la hauteur observée h_o (n° 149) :

$$h_o = h_i + \varepsilon + c. \tag{7}$$

En rapprochant les formules (3) et (4) et en substituant R_m à R, on a ensuite :

$$h_v = h_o - d - R_m + P.$$

Mais si l'astre présente un diamètre apparent, on met l'un de ses bords en contact avec l'horizon, en sorte que h_o est la hauteur observée du bord supérieur ou inférieur. Pour obtenir la *hauteur vraie du centre*, il faut alors ajouter ou retrancher du 2e membre le *demi-diamètre central* δ donné par la Connaissance des Temps, et la formule générale de correction des hauteurs devient, par une notation évidente :

$$(8) \quad \begin{cases} h_v \odot = h_o \odot - d - R_m + P + \delta \\ h_v \odot = h_o \bar{\odot} - d - R_m + P - \delta. \end{cases}$$

La parallaxe en hauteur P est ici celle qui convient au bord observé ; elle doit donc se déduire, en toute rigueur, de la formule (5) dans laquelle Δ' représente la distance de ce bord au point C' ; mais on peut, sans erreur appréciable, remplacer Δ' par la distance de C' au centre

de l'astre. La formule (6) est, par suite, applicable dans les mêmes conditions d'exactitude que plus haut, h_a étant, bien entendu, la hauteur apparente du bord observé. L'erreur commise par cette substitution de distances est toujours négligeable : même dans le cas de la Lune, elle n'atteint pas o″,4.

Les quantités d et R_m s'obtiennent comme nous l'avons dit aux nos 146 et 147.

La Connaissance des Temps donne H et δ; on calcule P par la formule (6). Il faut remarquer que l'ordre des opérations indiquées dans les formules (8) n'est pas arbitraire, chaque résultat partiel devant servir au calcul de l'élément suivant.

On trouve dans les recueils de tables nautiques des tables spéciales dressées dans le but de simplifier la correction des hauteurs. Elles sont de trois sortes, selon l'astre observé :

156. 1° **Soleil**. — Les tables relatives au Soleil (V, Guyou; I, Friocourt; E, Caillet) supposent que l'on a observé le bord inférieur de l'astre. Elles donnent, en fonction de $h_o\odot$ et de l'élévation de l'œil, la quantité toute calculée :

$$x = -d - R_m + P + 16',$$

qui convient à la valeur moyenne 16′ de δ. Un tableau-annexe permet de corriger x de la petite différence $(\delta - 16')$, et ce résultat, ajouté à $h_o\odot$, fait connaître $h_v\oplus$.

Lorsqu'on a observé le bord supérieur, on opère comme ci-dessus, mais en changeant le signe de la correction de l'annexe, puis on retranche 32′ du résultat.

157. 2° **Étoiles et planètes.** — Dans la lunette du sextant, le diamètre apparent d'une planète est toujours assez petit pour que l'on puisse bissecter convenablement l'astre par l'horizon dans le mouvement de balancement. On prend ainsi, directement, la hauteur du centre. D'autre part, on néglige ordinairement la parallaxe en hauteur, celles de Mars et de Vénus (quand cette dernière est observable) ne dépassant guère o',3.

Il suit de là que la hauteur observée d'une planète peut se corriger de la même manière que celle d'une étoile, en faisant $P = o$ et $\delta = o$ dans les formules (8), ce qui donne :

$$(9) \qquad h_v * \doteq h_o * - (d + R_m).$$

Les tables (VI, Guyou; II, Friocourt) donnent le terme $(d + R_m)$ en fonction de h_o et de l'élévation de l'œil.

158. 3° **Lune.** — On commence par retrancher d de h_o, ce qui donne la hauteur réfractée h_r du bord observé, puis on prend Π dans la Connaissance des Temps. On a ensuite recours aux tables.

Les tables de correction (X, Guyou; III, Friocourt) sont divisées en deux tableaux, relatifs l'un au bord inférieur, l'autre au bord supérieur. Ces tableaux donnent le terme $(- R_m + P \pm \delta)$ en fonction de h_r et de Π.

Horizons artificiels.

159. **Horizon artificiel à la mer.** — Lorsque par nuit sombre ou par temps de brume l'horizon de la mer n'est pas visible, la mesure des hauteurs peut s'effectuer à l'aide d'un instrument nommé *horizon gyroscopique* ou *gyroscope collimateur*.

Cet appareil, imaginé par l'amiral Fleuriais, se compose essentiellement d'un gyroscope à rotation rapide (une centaine de tours par seconde) placé sur le sextant, en avant de l'objectif de la lunette. Un collimateur spécial, invariablement lié au système tournant, permet à l'observateur d'apercevoir un repère linéaire dans une direction sensiblement perpendiculaire à l'axe de rotation du gyroscope. Ce dernier, malgré les mouvements de la main et du navire, précessionne lentement autour de la verticale vraie; on conçoit donc qu'après avoir amené l'image réfléchie de l'astre en contact avec le repère artificiel, on puisse, par des corrections convenables, déduire la hauteur de la valeur de l'angle mesuré.

La théorie, les types de calcul et les descriptions détaillées du gyroscope collimateur se trouvent dans les mémoires publiés par l'inventeur en 1886 et 1891, par M. Baule dans la *Revue maritime* en 1890, par le commandant Schwérer dans les *Annales hydrographiques* de 1896 et enfin par M. l'ingénieur hydrographe en chef Favé dans les *Annales hydrographiques* de 1904, à l'occasion de récents perfectionnements apportés à l'instrument et à la méthode d'observation.

160. **Horizon artificiel à terre.** — A terre, on emploie pour la mesure des hauteurs un plan horizontal réfléchissant.

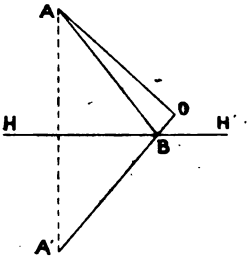


Fig. 35.

Soient HH' l'intersection du miroir horizontal par un plan vertical, et A l'image réfractée d'un astre.

Du point O situé au voisinage de HH', l'image virtuelle A' est vue dans la direction OA' telle que

$$\text{ABH} = \text{HBA}' = \frac{1}{2}\,\text{ABA}'.$$

Or, le triangle AOA' donne :

$$\text{ABA}' = \text{AOA}' + \text{OAB},$$

et comme l'angle OAB est évidemment négligeable pour tous les astres, on a :

$$\text{AOA}' = \text{ABA}' = 2\,\text{ABH}.$$

Si donc on mesure au sextant l'angle AOA', on obtient le double de la hauteur apparente réfractée de l'astre.

Le miroir horizontal est généralement constitué par la surface d'un liquide en équilibre (*horizon à fluide*). Nous ne parlerons pas de l'*horizon à glace* qui, par ses décalages fréquents, introduit des erreurs graves dans les mesures.

161. **Horizon à fluide.** — On a beaucoup employé l'huile ou, à défaut, le goudron pour constituer le bain réfléchissant dans le cas de l'observation du

Soleil. Mais le peu d'éclat de l'image réfléchie par ces liquides conduit à élever fortement le porte-lunette (n° 132), ce qui nuit à la stabilité et par suite au parallélisme de l'axe optique. En outre, par grand vent et malgré le toit protecteur, l'image réfléchie perd parfois sa forme sans que l'observateur en soit averti par des déformations brusques; tout au plus s'aperçoit-on d'une différence de coloration entre les différents points de l'image. Enfin, par des températures inférieures à + 10°, le liquide se fige.

Sans doute, lorsqu'on ne savait utiliser les bains de mercure qu'en couche profonde, les liquides précédents présentaient de grands avantages; aujourd'hui on doit déconseiller leur emploi. Le seul horizon artificiel pratique est le bain de mercure en couche mince.

La surface d'un bain de mercure en couche profonde est rarement immobile : les moindres ébranlements du sol se transmettent au liquide et le font vibrer de manière à rendre l'observation difficile, sinon presque toujours impossible. On a découvert depuis plus d'un siècle le moyen d'arrêter ces vibrations; il consiste à employer une cuvette en cuivre rouge pur préalablement amalgamé ou argenté et à n'y verser qu'une très petite quantité de mercure : ce liquide s'étale immédiatement comme s'il mouillait le métal de la cuvette, et, l'épaisseur de la couche étant très faible, l'adhérence qui résulte du contact intime des deux métaux suffit à amortir énergiquement les oscillations du liquide. Introduit en France pour la première fois par l'amiral Mouchez à l'observatoire de Montsouris, le nouvel horizon a été expérimenté par l'amiral Perrin qui a publié (*Revue maritime* de mai 1884) une descrip-

tion complète du modèle dont il a fait usage; ce modèle a été adopté par le Service hydrographique.

La cuvette est plane, rectangulaire, en cuivre rouge de 1 millimètre d'épaisseur. Elle a de 7 à 8 centimètres de largeur et de 13 à 14 centimètres de longueur; les bords sont relevés de manière à former une saillie de 2 à 3 millimètres de hauteur. Enfin deux oreilles sont rivées aux angles de l'un des petits côtés du rectangle et portent de petites vis calantes; une pointe est rivée en dessous, près du milieu de l'extrémité opposée.

Quand on a versé le mercure, en aussi petite quantité que possible, on vérifie l'horizontalité de sa surface en donnant à la cuvette de légers coups qui font vibrer le liquide : si les ondulations, très fugitives d'ailleurs, se propagent dans toute l'étendue de la cuvette, on peut être certain qu'il y a du mercure partout et qu'il est *parfaitement horizontal;* l'effet de la capillarité cesse à petite distance des bords.

Lorsque le mercure est sale, on le nettoie en promenant à plat sur la surface du bain un tube en verre, de longueur un peu inférieure à la largeur de la cuvette, et l'on fait en même temps tourner légèrement le tube autour de son axe de figure. On peut employer simplement un crayon, mais le faible diamètre du cylindre ne permet plus de le tenir directement par les extrémités : on y enfonce une pointe ou une plume métallique.

On doit réamalgamer la cuvette de temps en temps; on y verse quelques gouttes de mercure et on frotte la surface avec un tampon imbibé d'acide azotique.

Lorsque le vent est fort, on abrite la cuvette au moyen d'un toit percé de deux ouvertures garnies de

verres. On doit retourner ces verres de 180° dans leur monture après chaque mesure isolée d'une série, à moins qu'un examen attentif n'ait montré le parfait parallélisme des faces. Cette vérification se fait en fixant une lunette de manière à apercevoir un point éloigné sur l'un des fils du réticule; on interpose ensuite obliquement le verre à examiner, et si l'image dévie, il y a prismatisme.

162. **Observation des hauteurs à l'horizon artificiel à terre.** — Pour avoir le double de la hauteur apparente réfractée, il suffit, comme on l'a vu au n° 160, de prendre l'angle des images apparentes directe et réfléchie.

Cet angle s'observe comme il est dit au n° 142. Toutefois, dans le cas du Soleil, il convient non pas de superposer les disques centre pour centre, mais de les amener dans la position de deux cercles tangents extérieurement : on observe ainsi le contact avec plus de précision. On obtient la double hauteur du bord inférieur ou du bord supérieur, selon que l'on met en contact les bords voisins ou les bords opposés du disque apparent et de son image réfléchie par le bain. Si, dans le champ de la lunette, les disques paraissent s'écarter par suite du mouvement en hauteur, le contact extérieur correspond au bord inférieur le matin, au bord supérieur le soir; s'ils se rapprochent, c'est au contraire le bord supérieur le matin et le bord inférieur le soir.

Les observations à l'horizon artificiel sont susceptibles d'une grande précision. Aussi n'emploie-t-on pas la Lune, dont l'exactitude des coordonnées tabulaires laisse à désirer (n° 97); pour cet astre la correction de

parallaxe appliquée d'après les formules (4) et (6) ne serait d'ailleurs pas assez précise.

163. **Correction des hauteurs observées à l'horizon artificiel.** On commence d'abord par corriger l'angle lu l_i de la collimation et de l'excentricité, et l'on a :

$$2h_r = l_i + \varepsilon + c; \qquad \text{d'où} \qquad h_r = \frac{l_i + \varepsilon + c}{2}.$$

On a ensuite, en remplaçant dans les formules (8) la hauteur réfractée $(h_o - d)$ par la valeur ainsi obtenue, et en employant la réfraction exacte R :

$$(10) \qquad \begin{cases} h_r \odot = h_r \underline{\odot} - R + P + \delta \\ h_v \odot = h_r \overline{\odot} - R + P - \delta. \end{cases}$$

Ces formules conviennent au Soleil. On calcule R comme il a été dit aux nos 147 et 148; il faut donc noter les indications du baromètre et du thermomètre avant et après l'observation, et les interpoler.

P s'obtient par la formule (6) ou par les tables dressées à cet effet.

164. Pour les planètes on fait $\delta = 0$, en ayant soin, dans l'observation, de mettre directement en contact les centres des disques, lorsque le diamètre apparent est appréciable; mais on doit tenir compte de P, au moins pour Vénus, Mars et Jupiter.

Au lieu d'employer la formule (6) pour calculer P, il est plus simple d'avoir recours aux tables III (Soleil) et IV (planètes) de la *Connaissance des Temps*. On trouve des tables analogues dans le recueil du commandant Guyou (III et VIII).

165. Pour les étoiles on a simplement :

$$h_v \ast = h_r \ast - \mathrm{R}.$$

166. **Erreurs à craindre sur les hauteurs.** — Les erreurs proviennent de diverses sources.

1° *Observateur.* — Le manque d'habileté de l'observateur occasionne des erreurs de pointés et, ce qui revient au même, d'appréciation du temps. Ces défauts s'atténuent par l'éducation; l'équation personnelle est bientôt réduite à un minimum négligeable en Navigation.

Un éclairage latéral et oblique des graduations produit des erreurs de lecture auxquelles il faut prendre garde. Il faut également s'habituer à n'admettre les pointés que lorsqu'ils sont obtenus sensiblement au centre du réticule (remarque du n° 133).

L'effet des erreurs accidentelles s'atténue par l'emploi des séries d'observations.

2° *Instrument.* — Nous avons examiné au Chapitre II la nature des erreurs imputables à l'instrument lui-même, leur importance et les moyens propres à s'en affranchir.

3° *Causes extérieures.* — Par les temps calmes, les rayons lumineux qui traversent obliquement les couches basses de l'atmosphère subissent parfois des réfractions anormales dues au défaut d'homogénéité de ces couches. Pour les rayons émanant des astres, on élimine cette cause d'erreur en ayant soin de n'observer que des hauteurs supérieures à 10°; cependant, à la mer, en vue du point, on peut utiliser les hauteurs jusqu'à 5° ou 6°, sauf circonstances atmosphériques exceptionnelles,

On ne peut aussi facilement s'affranchir de ces perturbations en ce qui concerne la dépression apparente, et le coefficient $\gamma = 0{,}08$ adopté pour le calcul de cette quantité (n° 146) peut être fort éloigné de la verité; le calme complet est heureusement rare, et l'erreur s'atténue dès que la brise se lève. Cette erreur systématique n'existe pas dans les observations à l'horizon artificiel qui, de ce fait, sont beaucoup plus précises que celles faites à l'horizon de la mer.

Les erreurs accidentelles de contact sont négligeables, par beau temps, pour un observateur exercé; mais il n'en est plus de même par grosse mer, lorsque les mouvements du navire rendent l'équilibre difficile et font varier incessamment, et dans de grandes limites, l'élévation de l'œil.

Enfin il arrive parfois que l'on aperçoive près de l'horizon plusieurs lignes horizontales alternativement sombres et brillantes, d'ailleurs assez nettes; on doit se garder de confondre le dernier de ces *faux horizons*, dus à des jeux de lumière entre les nuages et la mer, avec l'horizon véritable souvent mal défini dans ces circonstances.

Levers et couchers des astres.

167. **Levers et couchers vrais.** — Le lever ou le coucher vrai d'un astre a lieu lorsque la hauteur vraie du centre de l'astre s'annule en croissant ou en décroissant.

L'angle horaire et l'azimut à ces instants sont donnés par des formules simples, faciles à mettre en tables. On

a donc tout naturellement pensé à utiliser en Navigation les phénomènes des levers et couchers, tant pour régler approximativement la montre d'habitacle que pour déterminer la variation du compas (n° 16). Mais, le navigateur n'observant que des apparences, il y aura lieu de rechercher les corrections à apporter aux quantités calculées pour ramener le phénomène vrai au phénomène apparent.

Dans le triangle de position de la sphère géocentrique, on a :

$$(11)\quad \begin{cases} \sin h = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t \\ \sin \mathfrak{D} = \sin h \sin \mathrm{L} - \cos h \cos \mathrm{L} \cos \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Faisons $h = 0$, $t = t_\omega$ et $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}_\omega$. Il vient :

$$0 = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t_\omega,$$

$$\sin \mathfrak{D} = - \cos \mathrm{L} \cos \mathrm{Z}_\omega;$$

d'où l'on tire :

$$(12)\quad \begin{cases} \cos t_\omega = - tg \, \mathrm{L} \, tg \, \mathfrak{D}, \\ \cos \mathrm{Z}_\omega = - \sin \mathfrak{D} \, \text{séc} \, \mathrm{L}. \end{cases}$$

Ces formules ne distinguent pas entre le lever et le coucher; mais nous savons par les lois du mouvement diurne que la hauteur croît constamment entre les instants des deux passages inférieur et supérieur consécutifs : par suite le lever correspond à

$$t_\omega > 12^h \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_\omega > 180°.$$

On verrait de même que le coucher, étant postérieur au passage supérieur, correspond à

$$t_\omega < 12^h \quad \text{et} \quad \mathrm{Z}_\omega < 180°.$$

Ces angles étant donnés par leurs cosinus, cette remarque suffit à les déterminer sans ambiguïté.

Nous n'avons pas à nous occuper ici des conditions de réalité du phénomène : c'est un problème d'Astronomie pure, d'ailleurs bien connu.

Si l'astre n'est pas une étoile, on prend Θ pour l'époque du passage au méridien, exprimée en temps de Paris et augmentée ou diminuée de 6 heures selon qu'il s'agit du coucher ou du lever. Cela suffit ordinairement, car on n'a besoin de t_ω et de Z_ω qu'à 15′ près environ. Si l'on voulait plus de précision, notamment dans le cas de la Lune, on recommencerait le calcul avec une meilleure valeur de la déclinaison, prise pour l'époque du passage corrigée de la valeur calculée de t_ω.

Connaissant t_ω, c'est-à-dire T*ag* au moment du lever ou du coucher, on en déduit ensuite T*mg* par une conversion de temps (n° 111).

Les formules (12) ont été mises en tables (IX, Guyou; XXIV, Friocourt; XXXV et XXXVII, Caillet). L'*amplitude* donnée par les tables au lieu de l'azimut est la différence d'azimut entre l'astre et le point Est (lever) ou le point Ouest (coucher). On sait que l'astre se trouve, par rapport à ces points, du même côté que le pôle de l'hémisphère auquel il appartient.

168. **Levers et couchers apparents.** — On peut écrire à tout instant :

$$h_v = h_o + dh,$$

dh étant la somme des corrections que nous savons calculer. A l'instant du phénomènes apparent h_o est nulle; on a donc :

$$h_v = dh.$$

Ainsi h_v est toujours petite, et pour passer du phé-

nomène vrai au phénomène apparent, il nous suffira de calculer les corrections dt_ω et dZ_ω correspondantes à une variation dh de la hauteur vraie.

La correction de t_ω sera ainsi exprimée en temps de l'astre; pour les besoins de la pratique, on peut évidemment la supposer exprimée en temps moyen.

L'azimut des formules du n° 167 est l'azimut vrai géocentrique; cet angle ne diffère pas de l'azimut apparent observé au même instant, car de la sphère géocentrique à la sphère locale la parallaxe déplace l'astre très sensiblement dans son vertical, et il en est de même pour le déplacement dû à la réfraction. On obtiendra donc l'azimut apparent au moment du phénomène apparent en calculant l'azimut vrai $(Z_\omega + dZ_\omega)$ à cet instant.

Cela posé, différencions les formules (11). On a :

$$\cos h dh = -\cos L \cos \mathfrak{D} \sin t dt,$$

$$0 = \cos h \sin L\, dh + \sin h \cos L \cos Z dh + \cos h \cos L \sin Z dZ;$$

d'où, en faisant $h = 0$:

$$dt_\omega = -\sec L \sec \mathfrak{D} \operatorname{cosec} t_\omega dh,$$

$$dZ_\omega = -tg\, L \operatorname{cosec} Z_\omega dh;$$

ou, en exprimant dh en minutes d'arc, dt_ω en minutes de temps et dZ_ω en degrés :

$$(13)\quad \begin{cases} dt_\omega = -\frac{1}{15} \sec L \sec \mathfrak{D} \operatorname{cosec} t_\omega dh, \\ dZ_\omega = -\frac{1}{60} tg\, L \operatorname{cosec} Z_\omega dh. \end{cases}$$

Ces corrections peuvent se calculer très rapidement,

à 3 décimales. Pour les mettre sous une forme se prêtant à la mise en tables, nous éliminerons t_ω et Z_ω en conservant L et δ comme variables. Le triangle de position nous donne :

$$\sin Z \cos h = \cos \delta \sin t,$$

d'où

$$\sin Z_\omega = \cos \delta \sin t_\omega.$$

En rapprochant cette formule de la valeur (12) de $\cos Z_\omega$, on a facilement :

$$1 = \cos^2 \delta \sin^2 t_\omega + \sin^2 \delta \sec^2 L,$$

$$\sin^2 t_\omega = \frac{1 - \sin^2 \delta \sec^2 L}{\cos^2 \delta} = \frac{\cos^2 L - \sin^2 \delta}{\cos^2 L \cos^2 \delta},$$

d'où

$$\sin^2 Z_\omega = \frac{\cos^2 L - \sin^2 \delta}{\cos^2 L}.$$

En passant aux premières puissances de ces sinus, il faut prendre le radical avec le signe — ou le signe + selon qu'il s'agit du lever ou du coucher, puisque nous savons que les angles correspondants sont, suivant le cas, supérieurs ou inférieurs à π. On a donc :

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cosec} t_\omega &= \mp \frac{\cos L \cos \delta}{\sqrt{\cos^2 L - \sin^2 \delta}} \\ \operatorname{cosec} Z_\omega &= \mp \frac{\cos L}{\sqrt{\cos^2 L - \sin^2 \delta}} \end{aligned}\right\} \begin{matrix} - \text{ lever} \\ + \text{ coucher.} \end{matrix}$$

En remplaçant dans les formules (13), il vient :

$$(14) \qquad \left.\begin{aligned} dt_\omega &= \pm \frac{1}{15} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 L - \sin^2 \delta}} \cdot dh \\ dZ_\omega &= \pm \frac{1}{60} \frac{\sin L}{\sqrt{\cos^2 L - \sin^2 \delta}} \cdot dh \end{aligned}\right\} \begin{matrix} + \text{ lever} \\ - \text{ coucher.} \end{matrix}$$

Les tables XXXVI et XXXVIII de Caillet donnent ces valeurs de dt_ω et de dZ_ω pour la valeur particulière $dh = \pm 100'$. Les tables XXVII et XXVIII de Friocourt correspondent à $dh = \pm 50'$. Enfin l'amiral Perrin, dans ses tables, donne dt_ω pour $dh = -55'$ (voir n° 170).

169. **Cas des étoiles et des planètes.** — En négligeant la parallaxe des planètes, la correction dh est, dans ce cas :

$$dh = -d - R_m.$$

En supposant l'observateur élevé de 5 mètres, on a $d = 4'$; la hauteur réfractée est alors $-0°.4'$, ce qui donne $R_m = 35'$ environ. On a ainsi :

$$dh = -39'.$$

170. **Cas du Soleil.** — Cherchons dh dans le cas de l'observation du lever ou du coucher apparents du bord supérieur de l'astre. On a, par les formules (8), en négligeant P et en prenant $\delta = 16'$:

$$dh = -d - R_m - 16'.$$

L'observateur étant supposé élevé de 5 mètres, on a $d = 4'$; la hauteur réfractée est $-0°.4'$ et $R_m = 35'$ comme dans le cas précédent. On a donc :

$$dh = -55'.$$

171. **Cas de la Lune.** — En observant le lever ou le coucher apparents du bord supérieur, on a, par les formules (8) :

$$dh = -d - R_m + P - \delta.$$

h_a étant voisin de o, on a $P = \Pi$, dont la valeur moyenne est $57'$.

D'autre part, la valeur moyenne de δ est $15',6$, soit $16'$.

En supposant, comme plus haut, l'observateur élevé de 5 mètres, on a :

$$dh = -4' - 35' + 57' - 16' = +2'.$$

Ainsi le coucher apparent du bord supérieur de la Lune a lieu à peu près au même instant que le coucher vrai du centre, dans les circonstances moyennes.

Pour un observateur élevé de 12 mètres, on trouverait : $dh = o$.

172. **Lever et coucher vrais du Soleil.** — On peut formuler une règle très simple, déjà donnée au n° 16, pour reconnaître l'instant du lever ou du coucher vrais du centre du Soleil.

Les formules (8) nous donnent, en faisant $h_v \odot = o$, $P = o$, $\delta = 16'$ et en remplaçant $h_o - d$ par h_r :

$$o = h_r \odot - R_m \odot + 16',$$

$$o = h_r \odot - R_m \odot - 16'.$$

A l'instant du lever ou du coucher vrais du centre, on a donc :

$$(15) \qquad \begin{cases} h_r \odot = R_m \odot - 16' \\ h_r \odot = R_m \odot + 16'. \end{cases}$$

En consultant la table des réfractions moyennes, on peut former le tableau suivant :

h_r	$R_m - 16'$	$R_m + 16'$
0°.10′	15′,9	. . .
20	14 ,2	. . .
30	12 ,6	44′,6
40	. . .	43 ,1
50	. . .	41 ,7

On en déduit aisément, par interpolation, que les équations (15) ont pour solutions :

$$h_r \odot = R_m \odot - 16' = 15',0,$$
$$h_r \overline{\odot} = R_m \overline{\odot} + 16' = 42',7.$$

Ce qui donne pour le diamètre réfracté vertical du Soleil :

$$h_r \overline{\odot} - h_r \odot = 27',7.$$

D'autre part, pour un observateur élevé de 5 mètres, on a $d = 4'$ et par suite :

$$h_o \odot = 15' + 4' = 19'.$$

Or $\frac{2}{3} \times 27',7 = 19'$ environ. D'où la règle :

Le lever (ou le coucher) vrai du centre du Soleil a lieu lorsque la hauteur observée du bord inférieur est environ les $\frac{2}{3}$ du diamètre vertical apparent de l'astre, pour un observateur élevé de 5 mètres.

CHAPITRE IV

CHRONOMÈTRES

173. Les montres marines sont des instruments mécaniques destinés à fournir, à l'aide de corrections simples et à tout instant, l'heure du premier méridien.

Les montres délivrées aux navires pour la navigation sont toutes réglées sur le temps moyen; pour certaines missions spéciales, on emploie des instruments réglés sur le temps sidéral.

Les *chronomètres* sont installés à poste fixe, dans une armoire spéciale; ils sont suspendus à la Cardan afin d'être soustraits, autant que possible, à l'influence des mouvements de roulis et de tangage. Les *compteurs*, au contraire, sont destinés à être déplacés pour les observations et à servir de montres de comparaison; leur mécanisme est aussi soigné que celui des chronomètres, mais leurs dimensions sont moindres et ils ne sont pas suspendus.

Les chronomètres battent la demi-seconde, et les compteurs $0^s,4$ seulement. Cependant quelques compteurs, assez rares, battent aussi la demi-seconde.

Nous désignerons, selon l'usage, par A, B, C... les

divers chronomètres et par M, N, Q... les compteurs Ces lettres s'appliqueront, suivant le cas, aux instruments eux-mêmes ou aux heures qu'ils indiquent.

174. **État absolu.** — L'*état absolu* d'une montre à un instant donné est la correction à apporter à l'indication de la montre pour obtenir l'heure moyenne de Paris. Ainsi l'on a, par définition, à l'heure A du chronomètre :

$$Tmp = A + \mathcal{E}_a,$$

d'où

$$\mathcal{E}_a = Tmp - A.$$

Cette correction $\mathcal{E}_a$ peut être, en principe, positive ou négative; cependant, comme les montres marines ne sont graduées que de o à 12^h, la somme $(A + \mathcal{E}_a)$ peut donner lieu à une ambiguïté de 12^h, sans inconvénient dans la pratique, sur la véritable valeur de T*mp* : On profite de cette ambiguïté inévitable pour convenir de compter $\mathcal{E}_a$ toujours positif.

A cet effet, lorsque par l'observation on a trouvé la valeur de T*mp* correspondante à l'heure A, on ajoute au besoin 12^h à T*mp* pour rendre la différence $(Tmp - A)$ positive, et ce nombre est adopté comme état du chronomètre.

On convient, en outre, de retrancher 12^h à la différence $(Tmp - A)$ lorsqu'elle est plus grande que ce nombre.

Il suit de là qu'un état chronométrique est, par convention, essentiellement positif et moindre que 12^h; ajouté à l'heure du chronomètre, il donne T*mp* avec une ambiguïté de 12^h.

Pour lever l'ambiguïté, il suffit de calculer T*mp* à

vue, en se servant de l'heure locale approchée et de la longitude.

Pour une montre bien réglée, l'état ne varie que très lentement avec le temps.

175. **Comparaison de deux montres.** — La *comparaison* de deux montres est la différence de leurs indications simultanées. Comme pour l'état, on exprime la comparaison par un nombre positif inférieur à 12^h. On calcule ordinairement la différence en retranchant l'heure de l'instrument le moins précis de celle de l'instrument le plus précis. Ainsi, si l'on considère que le chronomètre A est plus précis que tous les autres B, C.., on prendra les comparaisons en formant les différences (A — B), (A — C)... Au contraire, si le chronomètre A est comparé à la pendule P, la comparaison sera (P — A).

La comparaison de deux montres réglées sur la même espèce de temps ne varie que très lentement; si les instruments étaient parfaits, la comparaison serait constante. En général la comparaison (A — M) est utilisée très peu de temps après avoir été prise, et on peut la considérer comme constante; nous indiquerons, du reste, comment l'on tient compte de la variation dans certains cas. Connaissant l'heure M d'une observation au compteur, on en déduit l'heure correspondante A du chronomètre en ajoutant à l'indication M la comparaison $C_a = (A - M)$; on obtient ainsi A sans ambiguïté, car on sait d'avance que ce nombre doit être inférieur à 12^h.

176. **Manière de prendre une comparaison.** — Quand on dispose d'un compteur battant $0^s,4$, ce

qui est le cas général, il faut toujours exécuter les comparaisons par la méthode dite des *coïncidences;* ce n'est ni plus long, ni plus difficile que d'opérer d'une manière approchée.

Ouvrir la boîte du chronomètre à comparer, les boîtes des autres montres étant fermées pour en amortir les battements.

Prendre la cadence du compteur en partant d'une dizaine ronde de secondes et en supputant mentalement les battements sans prononcer de nombres. Le plus simple est de compter les battements de 0 à 25 et de recommencer indéfiniment; si l'on veut connaître l'indication du compteur correspondante à un battement de rang n, on écrit simplement ce nombre, puis on lit sur l'instrument la dizaine de secondes ronde précédente; la réduction se fait en multipliant n par 4 et en divisant le produit par 10. Si par exemple l'instant noté est le treizième battement après celui qui correspond à $20^s,0$, l'heure observée est égale à

$$20 + \frac{13 \times 4}{10} = 25^s,2.$$

La cadence prise, il faut écouter simultanément les deux instruments, compteur et chronomètre, jusqu'à ce que l'on ait observé une coïncidence de battements. En notant cette coïncidence, on obtient la comparaison à moins de $0^s,05$ près, ainsi que nous allons le voir.

L'expérience a montré que dans tout intervalle de 2 secondes on observe soit une seule coïncidence exacte, soit deux coïncidences approchées dont l'une paraît, en général, plus exacte que l'autre. On peut expliquer ce fait en admettant que l'oreille perçoit comme simulta-

nés deux battements qui se succèdent à un intervalle de quelques centièmes de seconde, mais que la simultanéité apparente des bruits cesse bien avant que l'écart n'ait atteint $0^s,10$.

En effet, considérons un battement quelconque du chronomètre et le premier battement suivant du compteur. Donnons à chacun de ces battements le numéro d'ordre 0, et continuons à compter les battements en les numérotant 1, 2,... pour chacun des deux instruments. Le chronomètre battant $0^s,5$ et le compteur $0^s,4$, l'avance du battement 0 du chronomètre peut être représentée, en centièmes de secondes, par $(10d+c)$, d étant un nombre entier égal ou inférieur à 3, et c un nombre inférieur à 10.

Le battement n° 1 du chronomètre ne précède le battement n° 1 du compteur que de $[10(d-1)+c]$ centièmes de seconde; cette avance se réduit à $[10(d-2)+c]$ pour les battements n° 2, et enfin, pour les $(d-1)^{es}$ battements, l'avance est $(10+c)$ centièmes : l'oreille perçoit encore très bien la différence.

Pour les d^{es} battements, l'avance n'est plus que c centièmes, et pour les $(d+1)^{es}$ battements, l'écart du battement chronométrique se change en un retard de $(10-c)$ centièmes. A ces deux phases les écarts des battements correspondants sont donc inférieurs à $0^s,10$, et l'oreille perçoit deux coïncidences approchées, dont l'une paraît meilleure que l'autre, à moins que c ne soit très voisin de 0 ou de 10 : en ce cas il n'y en a qu'une, d'ailleurs très nette. Il suit de là que si l'on note comme rigoureusement simultanés les battements

qui coïncident le mieux, on obtient la comparaison à moins de $0^s,05$ près.

Mais si c est très peu différent de 5, les deux coïncidences approchées paraissent également bonnes, et l'on ne sait plus laquelle adopter.

En notant comme exacte la coïncidence des d^{es} battements, la comparaison obtenue est trop faible de c centièmes; pour les $(d+1)^{es}$ battements, elle est trop forte de $(10-c)$ centièmes : la moyenne des deux valeurs est donc en erreur de $(5-c)$ centièmes, ce qui est encore inférieur à $0^s,05$.

Aux $(d+2)^{es}$ battements le retard du chronomètre s'est accru de $0^s,10$, et par suite, l'oreille sépare très nettement les deux bruits.

Il est clair d'ailleurs que si la coïncidence existe pour les d^{es} battements, deux secondes plus tard le chronomètre donnera exactement son $(d+4)^e$ et le compteur son $(d+5)^e$ battement : il y aura donc une nouvelle coïncidence.

Pour noter l'une des coïncidences, on suit mentalement la numération des battements du compteur tout en regardant l'aiguille des secondes du chronomètre. La coïncidence trouvée, on écrit le nombre de battements du compteur et, immédiatement au-dessus, l'indication lue sur le cadran des secondes du chronomètre à l'instant de la coïncidence. On complète ensuite ces inscriptions en lisant d'abord la dizaine ronde de secondes du compteur, puis la minute et l'heure du chronomètre, et enfin celles du compteur. Pour obtenir la comparaison, il ne reste plus qu'à réduire en secondes et dixièmes le nombre inscrit pour les battements du compteur, et à effectuer la soustraction.

La méthode est applicable à la mer, malgré les bruits de la machine.

177. Lorsqu'on compare une montre sidérale à une montre moyenne par la méthode des coïncidences, on obtient encore plus de précision; la comparaison est déterminée à $0^s,01$ près environ (Comptes rendus de l'Académie des sciences, 29 mai 1905).

178. Mais lorsque les deux montres, réglées sur le même temps, battent la même fraction de seconde, le procédé n'est plus applicable.

Il convient en ce cas de prendre la cadence du compteur, puis de le tenir à l'oreille, comme dans ce qui précède, en suivant des yeux l'aiguille des secondes du chronomètre. On apprécie les numéros des deux battements consécutifs du compteur entre lesquels tombe une seconde ronde du chronomètre; en notant comme correspondant à cette seconde le battement qui en diffère le moins, ou la moyenne des deux s'il y a doute, on obtient la comparaison à $0^s,2$ près environ. Cette approximation est plus que suffisante pour les observations à la mer; mais lorsque le compteur sert d'intermédiaire pour le contrôle réciproque des chronomètres par les marches relatives, ou pour la détermination des états, on ne saurait trop rechercher de précision dans les comparaisons.

RÉGLAGE DES CHRONOMÈTRES

Détermination de l'état absolu.

179. **Calcul d'heure par la hauteur.** — Dans un lieu de coordonnées connues (L, G), on observe à terre, à l'horizon artificiel, plusieurs hauteurs du même astre en notant les heures correspondantes du compteur.

Pour cette observation de précision on emploie le Soleil ou une étoile, rarement une planète et jamais la Lune, à cause de l'imperfection des tables lunaires.

On doit consulter le baromètre et le thermomètre au départ du bord et au retour, afin d'obtenir par interpolation leurs indications au moment de l'observation, en vue de la correction précise des hauteurs.

Le compteur est comparé à tous les chronomètres avant et après l'observation.

Désignons par A l'un des chronomètres, et soient C'_a la comparaison à l'heure M' (départ), C''_a la comparaison à l'heure M'' (retour). Admettant la variation proportionnelle de la comparaison, on en calcule la valeur C_a à l'heure M (milieu des observations) en écrivant :

$$C_a = C'_a + (C''_a - C'_a)\frac{M - M'}{M'' - M'}.$$

$(C''_a - C'_a)$ est exprimée en secondes et fractions déci-

males; il faut avoir soin d'exprimer en une même unité les deux termes du rapport $\frac{M - M'}{M'' - M'}$, par exemple en heures et fractions décimales.

Connaissant C_a, on obtient l'heure A du chronomètre, pour l'instant d'une indication quelconque M du compteur pendant la série d'observations, par la formule

$$A = C_a + M,$$

d'où l'on tire :

$$T_{mp} - A = T_{mp} - C_a - M,$$

ou

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_m - C_a.$$

On a de même pour le chronomètre B :

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_m - C_b,$$

et ainsi des autres.

Les états des divers chronomètres pouvant se déduire de celui du compteur, voyons comment l'on déterminera $\mathcal{E}_m$.

En corrigeant les hauteurs prises au sextant comme il est dit aux n^{os} 163 et 164, on obtient les hauteurs vraies h_1, h_2,... h_n de l'astre, correspondantes aux heures M_1, M_2,... M_n du compteur.

Considérons dans la série d'observations deux termes correspondants quelconques que nous désignerons par h et M.

L'état du compteur est toujours connu avec assez de précision pour que l'on puisse calculer l'heure T_{mp} de l'observation (h, M) à une fraction de minute près, ce qui permet de tirer de la *Connaissance des Temps* la déclinaison (♀) de l'astre à cet instant : pour les étoiles,

il suffit même d'interpoler simplement pour la date du jour.

Le triangle de position géocentrique (int^on n° IV) donne ensuite :

(1) $\sin h = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t,$

d'où l'on conclut l'angle horaire t ou Tag à l'instant M.

On convertit Tag en temps moyen (n^os 111 à 113); puis on forme la différence (Tmg — M), état du compteur sur le temps moyen local. On obtient de cette manière autant de valeurs de (Tmg — M) qu'il y a d'observations isolées, et l'on peut juger de la précision de l'ensemble. Adoptant la moyenne de ces résultats partiels, on a enfin :

$$\mathcal{E}_m = (\mathrm{T}mg - \mathrm{M}) + \mathrm{G}.$$

Un observateur consciencieux n'hésitera pas à réduire ainsi, une à une, ses observations; ce sera le seul moyen de se rendre compte de leur précision et d'obtenir l'erreur probable du résultat adopté.

Il est clair que si la correction d'excentricité du sextant employé n'était pas connue, on ne pourrait juger que de la précision relative des divers $\mathcal{E}_m$, et l'état adopté serait affecté d'une erreur inconnue.

Si le temps fait défaut, on peut réduire par la méthode expéditive du n° 185.

180. Le calcul de t s'exécute soit en résolvant la formule (1) par rapport à cos t :

$$(2) \quad \cos t = \frac{\sin h - \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D}}{\cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D}},$$

soit en rendant cette formule directement calculable

par logarithmes; on obtient ainsi, en introduisant la colatitude $\Lambda = 90^\circ - L$ et en posant

$$2S = (\Lambda + \mathfrak{D} + h) :$$

$$(3) \qquad \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos S \sin (S - h)}{\sin \Lambda \cos \mathfrak{D}},$$

$$(4) \qquad \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2} = \frac{\cos S \sin (S - h)}{\cos (S - \Lambda) \sin (S - \mathfrak{D})}.$$

On peut adopter de préférence la formule (3); elle est moins précise, mais plus simple que la formule (4) : comme t est ordinairement inférieur à 6^h, la différence de précision n'est pas très grande. En arrondissant les données à la seconde d'arc la plus voisine et en calculant à 6 décimales, l'erreur de calcul ne dépasse jamais quelques dixièmes de seconde de temps; si l'on veut un résultat irréprochable au point de vue du calcul, il faut employer 7 décimales aux logarithmes et tenir compte des dixièmes de seconde d'arc.

Il ne saurait d'ailleurs y avoir aucune hésitation sur la valeur à attribuer à t calculé par l'une des formules (2), (3) ou (4). En effet, t est inférieur ou supérieur à 12^h selon que l'astre est dans l'ouest ou dans l'est du méridien, c'est-à-dire selon que les hauteurs décroissent ou croissent avec le temps; le signe de cos t suffit dès lors à déterminer complètement t, et d'autre part on doit attribuer à $\frac{t}{2}$ une valeur comprise entre 0^h et 6^h dans le premier cas, entre 6^h et 12^h dans le second.

Mais les données sont souvent inexactes. La latitude tirée de la carte ou de la *Connaissance des Temps* n'est

pas toujours très précise; abstraction faite des petites erreurs de l'éphéméride, la déclinaison peut être affectée par une connaissance imparfaite de l'heure de Paris, et quand on s'en aperçoit, le calcul est terminé; enfin et surtout l'imperfection des sens de l'observateur, souvent aussi celle de son instrument, introduisent des erreurs de plusieurs secondes d'arc dans les hauteurs mesurées. Il ne suffit donc pas de savoir calculer avec précision; il faut encore rechercher s'il n'est pas possible de réduire l'influence des erreurs des données en ayant soin d'observer dans des conditions judicieusement choisies : c'est ce que nous allons examiner.

181. **Circonstances favorables au calcul d'heure.** — A cet effet, reprenons la formule (1) :

$$(1) \qquad \sin h = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t,$$

et donnons à h, L, $\mathfrak{D}$ les accroissements indépendants dh, $d\mathrm{L}$, $d\mathfrak{D}$, en sorte que $(h + dh)$, $(\mathrm{L} + d\mathrm{L})$, $(\mathfrak{D} + d\mathfrak{D})$ soient les véritables valeurs de ces éléments.

En représentant par $(t + \delta t)$ la valeur exacte de l'angle horaire, on aura, si l'on suppose les accroissements assez petits pour que l'on en puisse négliger les puissances supérieures à la première :

$$(5) \qquad \delta t = \frac{\partial t}{\partial h} dh + \frac{\partial t}{\partial \mathrm{L}} d\mathrm{L} + \frac{\partial t}{\partial \mathfrak{D}} d\mathfrak{D}.$$

Calculons les dérivées partielles. La formule (1) donne :

$$(6) \qquad \cos h = - \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \sin t \frac{\partial t}{\partial h},$$

$$0 = \cos L \sin \mathfrak{D} - \sin L \cos \mathfrak{D} \cos t - \cos L \cos \mathfrak{D} \sin t \frac{\partial t}{\partial L},$$

$$0 = \sin L \cos \mathfrak{D} - \cos L \sin \mathfrak{D} \cos t - \cos L \cos \mathfrak{D} \sin t \frac{\partial t}{\partial \mathfrak{D}}.$$

On a aussi, dans le triangle de position :

$$(7) \quad \begin{cases} \sin Z \cos h = \sin t \cos \mathfrak{D}, \\ \sin Z \cos L = \cos \mathfrak{D} \sin A, \\ -\cos h \cos Z = \sin \mathfrak{D} \cos L - \cos \mathfrak{D} \sin L \cos t, \\ \cos h \cos A = \sin L \cos \mathfrak{D} - \cos L \sin \mathfrak{D} \cos t. \end{cases}$$

Ces équations permettent de simplifier les expressions (6). On a en effet, en substituant et réduisant :

$$(8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial h} = -\dfrac{\cos h}{\cos L \cos \mathfrak{D} \sin t} = -\text{séc L coséc Z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial L} = -\dfrac{\cos h \cos Z}{\cos L \cos \mathfrak{D} \sin t} = -\text{séc L cotg Z} \\ \dfrac{\partial t}{\partial \mathfrak{D}} = \dfrac{\cos h \cos A}{\cos L \cos \mathfrak{D} \sin t} = \cos A \text{ séc L coséc Z}. \end{cases}$$

La formule (5) devient alors :

$$(9) \qquad \delta t = -\text{séc L coséc Z } dh$$
$$- \text{séc L cotg Z } dL + \cos A \text{ séc L coséc Z } d\mathfrak{D}.$$

Les signes de dh, dL, $d\mathfrak{D}$ étant quelconques, les termes du 2^e membre peuvent s'additionner arithmétiquement pour former δt; nous ne considérerons donc que les valeurs absolues de ces termes.

On voit tout d'abord, à cause du facteur séc L, que l'influence des erreurs croît, toutes choses égales d'ailleurs, avec la valeur absolue de L. Près des pôles le

procédé de détermination du temps par l'observation des hauteurs deviendrait inapplicable.

Quand l'astre est au méridien, les trois termes du 2e membre sont infinis. Mais si l'on fait tourner le vertical d'une manière continue pour le rapprocher du premier vertical, les deux premiers termes décroissent constamment en valeur absolue, quel que soit le sens de la rotation ; il en est de même du 3e terme, car la 2e des équations (7) montre que, pour un astre et un lieu donnés, sin Z et sin A croissent ou décroissent en même temps : cos A décroît donc avec cosec Z.

Il suit de là que les circonstances favorables au calcul d'heure seront réalisées lorsque l'écart azimutal du plan d'observation avec le méridien sera aussi voisin que possible de 90° ; dans le premier vertical lui-même, l'influence de dL serait nulle et celle des autres termes minimum.

Pour qu'un astre puisse être observé au 1er vertical, il faut qu'il remplisse, relativement à l'observateur, certaines conditions que nous allons chercher.

182. L'équation

$$\sin \mathfrak{D} = \sin h \sin L - \cos h \cos L \cos Z \tag{10}$$

donne, lorsqu'on y fait $\cos Z = 0$ et $h = h_1$:

$$\sin \mathfrak{D} = \sin h_1 \sin L ;$$

d'où l'on tire :

$$\sin h_1 = \frac{\sin \mathfrak{D}}{\sin L} . \tag{11}$$

Pour que le passage au 1er vertical soit visible, il faut que h_1 soit positive, et par suite que $\mathfrak{D}$ et L soient de même signe. Cette condition est nécessaire,

mais elle n'est pas suffisante, car il faut encore que h_1 existe, c'est-à-dire que l'on ait :

$$\frac{\sin \text{Ⓛ}}{\sin L} < 1,$$

ce qui exige $L > \text{Ⓛ}$ si $L > 0$ ou $L < \text{Ⓛ}$ si $L < 0$.

On conclut de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un astre soit observable au 1er vertical est que le passage au méridien supérieur s'effectue entre l'équateur et le zénith.

Pour avoir l'angle horaire t_1 au moment du passage au 1er vertical, faisons $\cos Z = 0$ dans la 3e des équations (7) ; il vient :

$$0 = \sin \text{Ⓛ} \cos L - \cos \text{Ⓛ} \sin L \cos t_1 ;$$

d'où

$$\cos t_1 = \operatorname{tg} \text{Ⓛ} \operatorname{cotg} L. \qquad (12)$$

Cette formule donne pour t_1 deux valeurs α et $(24^h - \alpha)$; l'une convient au passage dans l'est, l'autre au passage dans l'ouest. En transformant t_1 en temps moyen, on obtient l'heure à laquelle on devra se mettre en observation.

Parmi les astres susceptibles d'être observés au 1er vertical, le plus avantageux est, d'après (9), celui pour lequel la valeur absolue de $\cos A$ est la plus petite, ce qui revient à dire que la valeur absolue de $\sin A$ est la plus grande possible. Or la 2e des équations (7) donne, en y faisant $\sin Z = \pm 1$ et $A = A_1$:

$$\sin A_1 = \pm \cos L \operatorname{séc} \text{Ⓛ}.$$

On devrait donc choisir l'astre pour lequel $\operatorname{séc} \text{Ⓛ}$ est la plus grande, ce qui conduirait à prendre $\text{Ⓛ} = L$;

la formule (11) donnant alors $h_1 = 90°$, un tel astre ne serait pas observable à l'horizon artificiel.

183. Supposons maintenant que l'on ait :

$$\frac{\sin \Phi}{\sin L} > +1.$$

Le passage au premier vertical est impossible.

Les circonstances favorables exigeant que l'azimut soit aussi voisin que possible de 90° ou de 270°, cherchons la condition de leur réalisation.

La 2e des équations (7) donne :

$$\sin Z = \frac{\cos \Phi}{\cos L} \sin A.$$

Sin Z sera donc, en valeur absolue, aussi grand que possible si l'on peut avoir $\sin A = \pm 1$ ou $\cos A = 0$.

L'équation

$$\sin L = \sin h \sin \Phi + \cos h \cos \Phi \cos A$$

donne, en y faisant $\cos A = 0$, $h = h_2$:

$$\sin L = \sin h_2 \sin \Phi ;$$

d'où

$$\sin h_2 = \frac{\sin L}{\sin \Phi}, \qquad (13)$$

ce qui est toujours possible en ce cas.

D'autre part, l'angle horaire t_2 à cet instant s'obtient en faisant $\cos A = 0$ dans la 4e des équations (7) :

$$\cos t_2 = \operatorname{tg} L \operatorname{cotg} \Phi. \qquad (14)$$

Ainsi, lorsque l'on a $\frac{\sin \Phi}{\sin L} > 1$, c'est-à-dire quand l'astre passe au méridien supérieur entre le pôle élevé

et le zénith, il faut l'observer à l'instant où l'angle parallactique est 90° ou 270°; la hauteur et l'angle horaire sont donnés par les formules (13) et (14).

On verrait comme plus haut que l'astre théoriquement le plus avantageux serait celui qui culminerait au zénith : l'observation à l'horizon artificiel en serait impossible; mais on devra du moins écarter les astres passant loin du zénith, car les coefficients de la formule (9) tendent vers l'infini lorsque $\mathfrak{D}$ s'approche de $\pm\frac{\pi}{2}$.

184. On a vu au n° 182 que l'observation de l'astre à son passage au 1er vertical était impossible lorsque $\mathfrak{D}$ et L étaient de signes contraires. Or l'équation (10) peut s'écrire sous la forme

$$\cos Z = \frac{\sin h \sin L - \sin \mathfrak{D}}{\cos h \cos L},$$

ce qui montre clairement que, si $\mathfrak{D}$ et L sont de signes contraires, cos Z conserve le même signe tant que $h > 0$ et diminue constamment, en valeur absolue, avec h. Pour observer l'astre aux circonstances favorables, c'est-à-dire le plus près possible du 1er vertical, il faudrait donc choisir l'instant du lever ou du coucher; mais à cause des anomalies de la réfraction, on ne doit pas prendre de hauteurs inférieures à 10°.

Les tables donnant l'angle horaire et l'azimut des lever et coucher vrais peuvent évidemment servir à la résolution des formules (11), (12), (13) et (14), à condition de modifier convenablement les arguments. On trouve, dans les recueils nautiques, des tables spéciales au problème des circonstances favorables.

185. **Réduction par l'emploi des séries de hauteurs.** — Supposons que l'on observe à l'horizon artificiel une série de hauteurs aux heures M_1, M_2, ... M_n du compteur. Soient t_1, t_2, ... t_n les angles horaires correspondants. Posons :

$$M = \frac{\Sigma M_i}{n},$$

moyenne des heures observées;

$$T = \frac{\Sigma t_i}{n},$$

moyenne des angles horaires correspondants.

M et T se correspondent évidemment, l'angle horaire de l'astre croissant uniformément avec le temps pendant l'observation.

Si l'on fait la moyenne des hauteurs corrigées, la précision du résultat est, comme on le sait, proportionnelle à $\sqrt{n}$; mais on peut profiter de ce que les corrections (excentricité, parallaxe, etc.) sont à peu près constantes pour toutes les hauteurs de la série, et calculer la hauteur vraie moyenne h_m en corrigeant simplement la moyenne des lectures. Seule, la variation de la réfraction est sensible; mais, dans les conditions ordinaires d'observation des séries

$$(h > 20^\circ, \quad (t_n - t_1) < 15^m),$$

on peut admettre qu'elle est proportionnelle à celle de la hauteur, ce qui ne change pas la conclusion précédente.

D'autre part. si l'on calcule par les formules du n° 180 l'angle horaire t_m correspondant à la moyenne h_m

des hauteurs vraies, on obtient par ce calcul unique[1] l'état absolu du compteur tel qu'on le déduirait de la moyenne des états calculés à l'aide de chaque hauteur, à condition toutefois que l'on connaisse l'heure M_m correspondante à cet angle horaire t_m.

186. La réduction des observations est ainsi plus rapide qu'au n° 180; mais il nous faut indiquer comment l'on peut obtenir M_m.

On a identiquement :

$$(15) \qquad M_m = M + (M_m - M),$$

et l'on peut écrire :

$$(16) \qquad M_i - M = t_i - T,$$

en supposant le compteur réglé sur le temps de l'astre : tel est le cas pour un compteur moyen quand il s'agit d'une observation solaire, ou pour un compteur sidéral quand on observe une étoile. Mais si l'on emploie un compteur moyen pour une observation d'étoile, l'équation (16) n'est correcte que si l'on transforme la différence $(t_i - T)$ du temps sidéral en temps moyen.

Cela posé, on a, en remplaçant dans (15) :

$$(17) \qquad M_m = M + (t_m - T),$$

et comme M est connu, il nous suffit de calculer la petite correction $(t_m - T)$.

[1] Pour ce calcul on doit, dans le cas du Soleil et des planètes, employer la déclinaison qui correspond à l'instant de la moyenne M des heures observées. Quand on veut tenir compte de la variation de $\mathcal{D}$ pendant la durée de la série, on trouve qu'il faut ajouter au deuxième membre de la formule (21) un terme qui n'affecte les *centièmes de seconde* que dans des circonstances exceptionnellement défavorables; c'est pourquoi nous avons fait abstraction de cette variation.

187. A cet effet, considérons l'équation qui lie la hauteur vraie à l'angle horaire :

$$(18) \quad \sin h = \sin L \sin \mathfrak{D} + \cos L \cos \mathfrak{D} \cos t,$$

et supposons $\mathfrak{D}$ invariable pendant les observations. Cette hypothèse ne pourrait s'appliquer à la Lune, mais on sait déjà que cet astre ne peut être utilisé pour un calcul d'heure.

La hauteur h est ainsi fonction d'une seule variable t. Appelons H la hauteur vraie inconnue qui correspond à l'heure T ; en appliquant la série de Taylor à l'observation de rang i, nous avons :

$$h_i - H = \frac{dh}{dt}(t_i - T) + \frac{1}{2}\frac{d^2h}{dt^2}(t_i - T)^2,$$

en donnant à h et à t, dans les dérivées, les valeurs H et T, et en supposant la série assez courte pour que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur.

En écrivant ce développement pour chaque observation et en faisant la somme, il vient :

$$\Sigma h_i - nH = \frac{dh}{dt}\Sigma(t_i - T) + \frac{1}{2}\frac{d^2h}{dt^2}\Sigma(t_i - T)^2.$$

Comme par définition T est la moyenne des t_i, on a :

$$\Sigma(t_i - T) = 0,$$

et par suite :

$$\frac{\Sigma h_i}{n} - H = \frac{1}{2n}\frac{d^2h}{dt^2}\Sigma(t_i - T^2),$$

et, puisque $\frac{\Sigma h_i}{n}$ est ce que nous avons appelé h_m :

$$h_m - H = \frac{1}{2n}\frac{d^2h}{dt^2}\Sigma(t_i - T)^2.$$

Mais, pour l'observation de rang m, on peut écrire :

$$h_m - H = \frac{dh}{dt}(t_m - T),$$

en négligeant les termes suivants, eu égard à la très faible valeur de $(t_m - T)$. On a donc, en comparant ces deux dernières équations :

$$(t_m - T) = \frac{1}{2n}\frac{dt}{dh}\frac{d^2h}{dt^2}\Sigma(t_i - T)^2.$$

Posons $\mu_i = M_i - M$. On peut écrire, avec les mêmes réserves qu'au n° 186 :

$$\mu_i = t_i - T,$$

et il vient :

$$(t_m - T) = \frac{1}{2n}\frac{dt}{dh}\frac{d^2h}{dt^2}\Sigma\mu_i^2.$$

Remplaçant μ_i par $2\sin\frac{\mu_i}{2}$ et exprimant $(t_m - T)$ en secondes de temps, on a :

$$(t_m - T) = \frac{1}{15}\frac{dt}{dh}\cdot\frac{d^2h}{dt^2}\frac{1}{n}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{\mu_i}{2}}{\text{arc } 1''}.$$

Posons maintenant :

$$\mu_0 = \frac{1}{n}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{\mu_i}{2}}{\text{arc } 1''}.$$

Cette quantité se calcule très simplement en faisant usage de la Table IX de l'Astronomie pratique de Brünnow ou de la Table XLI de Caillet.

A défaut de ces tables, on peut employer la formule

$$\mu_0 = \frac{1,9635}{n}\Sigma\mu_i^2 \quad \text{avec } \log 1,9635 = 0,29303.$$

en exprimant μ_t en minutes de temps et fractions décimales, et en se servant d'une table de carrés.

On a dès lors :

$$(19) \qquad (t_m - \mathrm{T}) = \frac{1}{15}\,\mu_0 \frac{dt}{dh} \cdot \frac{d^2h}{dt^2},$$

et il nous reste à exprimer les coefficients différentiels. On a, par l'équation (18) :

$$\cos h \frac{dh}{dt} = -\cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \sin t,$$

$$\cos h \frac{d^2h}{dt^2} - \sin h \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = -\cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t;$$

d'où l'on tire, après quelques réductions :

$$(20) \qquad \frac{dt}{dh} \cdot \frac{d^2h}{dt^2} = \operatorname{cotg} t - \operatorname{tg} h \operatorname{séc} h \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \sin t.$$

Dans cette formule on doit attribuer à h et à t les valeurs H et T, ou mieux les valeurs connues h_m et t_m qui en diffèrent très peu.

Substituant dans les formules (17) et (19), on a enfin :

$$(21) \qquad \mathrm{M}_m = \mathrm{M} + \frac{1}{15}\,\mu_0 (\operatorname{cotg} t_m - \operatorname{tg} h_m \operatorname{séc} h_m \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \sin t_m).$$

On calcule la parenthèse en employant des logarithmes à 3 décimales.

188. Il est facile de démontrer que la formule (20) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{dt}{dh} \cdot \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{\cos \mathrm{Z} \cos \mathrm{A}}{\sin t}.$$

La correction à apporter à M pour réduire cette heure à la moyenne des hauteurs est donc nulle lorsque l'observation est faite aux circonstances favorables. Mais il n'est pas toujours possible d'observer dans ces conditions, particulièrement si l'on emploie exclusivement le Soleil ; on peut, il est vrai, scinder la série totale en plusieurs autres séries très courtes que l'on calcule isolément : la réduction est alors plus longue qu'en employant la série unique et la formule de correction.

189. **Calcul d'heure par la méthode des hauteurs égales d'étoiles.** — Cette méthode permet de déterminer la latitude et le temps du lieu en notant simplement les intervalles de temps qui s'écoulent entre les hauteurs égales d'étoiles observées dans divers azimuts et en utilisant les positions de ces étoiles pour en déduire les éléments cherchés, *sans faire intervenir la hauteur elle-même.* Les erreurs systématiques propres à l'instrument disparaissent alors des résultats qui ne sont plus affectés que des erreurs accidentelles dont on peut atténuer l'effet en multipliant les observations ; c'est ce qui explique la grande précision de la méthode.

Le principe de la méthode est dû à Gauss ; il a été généralisé depuis par Knorre et Anger. Au cours d'une magistrale étude sur ce sujet[1], l'amiral Perrin a fait connaître une solution indirecte, d'une remarquable simplicité, n'exigeant que des calculs de hauteur et

[1] PERRIN, 3.

d'azimut et se terminant, pour l'obtention des inconnues, par un graphique de *droites de hauteur*, toutes choses familières aux marins.

Quand on emploie l'horizon artificiel et le sextant, on peut reprocher à ce dernier instrument de ne pouvoir fournir des hauteurs absolument comparables entre elles que si la température, pendant la durée des observations, reste assez constante pour ne pas déranger l'équilibre des montures métalliques des miroirs. Cet effet est rarement à craindre pendant la nuit; mais, si dans le but d'augmenter la précision du pointé sur chaque étoile, on prend des séries de hauteurs, l'excentricité fluctuante, parfois sensible par suite de l'usure du pivot de l'alidade, intervient alors et peut occasionner des variations portant atteinte au principe même de la méthode. Quoi qu'il en soit, en opérant avec un sextant en bon état monté sur un pied et muni d'un oculaire grossissant de 12 à 15 fois, l'expérience a montré que l'on peut atteindre la précision de 2″ à 3″ dans les résultats.

L'*astrolabe à prisme*, de MM. Claude et Driencourt, est le véritable instrument de la méthode des hauteurs égales. Tout aussi portatif que le sextant, il échappe aux critiques formulées plus haut, car les pièces optiques qui y jouent le rôle des miroirs du sextant sont invariablement liées l'une à l'autre en étant constituées par les deux faces d'un prisme en verre. Avec un grossissement de 65 à la lunette, la précision obtenue est une fraction de seconde d'arc.

Nous ne pouvons donner ici de plus amples détails sur la méthode des hauteurs égales ; nous renvoyons le lecteur au Mémoire de l'amiral Perrin et au Traité

de MM. Claude et Driencourt : *Description et usage de l'astrolabe à prisme* (Paris, Gauthier-Villars).

190. **Calcul d'heure par les hauteurs correspondantes.** — La méthode consiste à noter les heures auxquelles un astre prend la même hauteur de part et d'autre du méridien. C'est un cas particulier de la précédente.

Elle est très précise, parce que les erreurs systématiques dont peuvent être affectées les hauteurs n'ont aucun effet sur le résultat que l'on attend et qui est l'heure du passage au méridien déduite de la moyenne des temps observés. Si l'on désigne, en effet, par t l'angle horaire de l'observation orientale, celui de l'observation occidentale est $t' = (2\pi - t)$, et la même erreur dh produit sur les heures observées respectives les altérations $dt = -\dfrac{\cos h}{\cos L \cos \delta \sin t} \cdot dh$,

et $dt' = -\dfrac{\cos h}{\cos L \cos \delta \sin t'} \cdot dh$, ainsi qu'on le voit par la 1re des équations (8). Or $\sin t' = -\sin t$ et par suite $dt = -dt'$: l'erreur disparaît donc de la moyenne.

De plus, les erreurs sur la latitude et la déclinaison ont peu (Soleil) ou pas d'influence (étoile) ; enfin la hauteur peut être tout à fait inconnue : il suffit que l'instrument de mesure soit stable, car il sert simplement d'instrument de comparaison, et la graduation elle-même peut être défectueuse sans qu'il en résulte d'inconvénient.

Lorsque l'astre observé est une étoile, il suffit de faire la moyenne $M_0 = \dfrac{M_1 + M_2}{2}$ des heures des

observations correspondantes pour obtenir l'heure du compteur au moment du passage au méridien. Comme d'ailleurs le temps sidéral de ce passage est égal à l'ascension droite que l'on tire de la *Connaissance des Temps*, on obtient T*mp* par une conversion de temps et l'on en déduit l'état du compteur. Le calcul est donc des plus simples.

Lorsqu'il s'agit du Soleil, il faut apporter à la moyenne des heures observées une petite correction pour tenir compte du mouvement en déclinaison. Cette correction se nomme *équation des hauteurs correspondantes;* nous allons en rappeler l'expression, renvoyant pour la démonstration aux traités d'Astronomie.

En désignant par M_1 et M_2 les heures des observations correspondantes notées au compteur, par M_0 l'indication de cet instrument au moment du passage du centre du Soleil au méridien, par $\tau = \frac{M_2 - M_1}{2}$ le demi-intervalle des observations exprimé en heures et fractions décimales, et enfin par $\mathfrak{D}$ la déclinaison du Soleil à midi vrai du lieu, on a :

$$(22) \quad \begin{cases} K = \dfrac{v\tau}{15}\left(\dfrac{\operatorname{tg}\mathfrak{D}}{\operatorname{tg}\tau} - \dfrac{\operatorname{tg} L}{\sin\tau}\right). \\ M_0 = \dfrac{M_1 + M_2}{2} + K. \end{cases}$$

v représente la variation horaire de la déclinaison à midi du lieu ; elle doit être exprimée en secondes d'arc, c'est-à-dire qu'il suffit de prendre cet élément dans la *Connaissance des Temps* pour midi vrai de Paris et de l'interpoler pour la longitude.

Dans ces conditions d'unités, K est exprimée en secondes de temps solaire vrai ; si le compteur employé était sidéral, on devrait, en toute rigueur, transformer l'intervalle τ en temps vrai ou moyen, mais dans les circonstances habituelles ($\tau < 6^h$) cette transformation peut être omise sans erreur appréciable.

On obtient K en calculant par logarithmes à 4 décimales la 1re des formules (22), ou encore en utilisant les tables de l'amiral Perrin, celles du commandant Schwérer[1], etc. Le commandant Guyou, dans son recueil de Tables nautiques, indique une manière de calculer K au moyen de l'angle parallactique et d'une petite table spéciale. Enfin on peut obtenir nomographiquement la quantité :

$$\psi = \frac{\tau}{15}\left(\frac{\operatorname{tg}\mathfrak{D}}{\operatorname{tg}\tau} - \frac{\operatorname{tg} L}{\sin\tau}\right),$$

et il ne reste plus qu'à effectuer le produit $v\psi$. (*Nomogramme de l'équation des hauteurs correspondantes, Revue maritime d'avril* 1905.)

On doit prendre une série de hauteurs de chaque côté du méridien, afin d'atténuer dans le résultat final l'effet des erreurs accidentelles. Les observations se font au sextant, à l'horizon artificiel.

Pour la simplicité des réductions, il faut avoir soin d'observer le *même bord* le matin et le soir : les images du Soleil doivent donc être disposées dans le champ de la lunette de manière à ce que le sens de leur vitesse relative soit le soir l'inverse de ce qu'il était le matin.

[1] Schwérer, 1.

D'une série à l'autre, les sommes des heures correspondantes doivent concorder, aux erreurs accidentelles près, car K ne varie que lentement avec τ : l'inspection de ces sommes permet de se rendre compte de la précision de l'ensemble des observations.

On calcule K pour l'intervalle qui sépare les instants milieux des séries ; on applique ensuite cette correction à la moitié de la moyenne des sommes $(M_1 + M_2)$. L'heure M_0 ainsi obtenue est, comme on l'a dit plus haut, celle indiquée par le compteur au moment du passage du centre du Soleil au méridien du lieu ; il suffit donc, pour déterminer l'état absolu, de connaître l'heure (T*mp*) à cet instant. Or, lorsque le Soleil passe au méridien, on a $Tvg = o$; par suite, on peut écrire :

A midi vrai local... $Tmp = Ev + G$.

L'équation du temps E*v* se déduit de Ev_0 pris pour le midi vrai de Paris de la date de l'observation et interpolé pour $Tvp = G$.

La méthode exige absolument que les hauteurs vraies soient égales de part et d'autre du méridien. Or le sextant permet de s'assurer seulement de l'égalité des hauteurs apparentes réfractées, et les hauteurs vraies peuvent différer par suite de la variation de la réfraction dans l'intervalle des observations. En général, les circonstances atmosphériques varient assez peu pour que la différence soit négligeable. S'il devenait nécessaire d'en tenir compte, on ajouterait à la moyenne des temps la correction algébrique :

$$x = \frac{1}{30} \cos h \text{ séc L séc } \delta \text{ cosec } \tau \,.\, (R_1 - R_2).$$

Dans cette formule, $(R_1 - R_2)$, différence des réfractions du matin et du soir, est exprimée en secondes d'arc et la correction x en secondes de temps; (1) correspond à la série occidentale et l'on peut prendre pour h la hauteur réfractée du milieu de la série, corrigée simplement du demi-diamètre.

191. Pour l'observation des hauteurs successives de chaque série, il est bon de placer à l'avance l'index du vernier en coïncidence avec une division du limbe; on choisit des divisions également espacées, de 10′ ou de 20′ selon la rapidité du mouvement en hauteur.

Du reste, cette manière de faire doit être recommandée même dans le cas d'une seule série destinée au calcul d'angle horaire par la méthode ordinaire : elle évite bien des erreurs de lecture, permet de s'assurer d'un coup d'œil si les temps notés croissent régulièrement, et rend les réductions plus faciles.

192. **Comparaison à une pendule.** — Lorsque le port possède un Observatoire, on peut obtenir les états des chronomètres par comparaison du compteur à la pendule de cet établissement.

Le compteur est comparé aux chronomètres au départ et au retour; on calcule les comparaisons C_a, C_b,... pour l'instant M de la comparaison C_p à la pendule, en interpolant comme il a été dit au n° 179.

L'Observatoire fournit l'état $\mathcal{E}_p$ de la pendule; on a donc :

$$\mathcal{E}_p = \mathrm{T}mp - \mathrm{P}$$

$$\mathrm{C}_p = \mathrm{P} - \mathrm{M},$$

d'où

$$\mathcal{E}_p + \mathrm{C}_p = \mathrm{T}mp - \mathrm{M} = \mathcal{E}_m.$$

L'état du compteur étant ainsi connu, on en déduit, à l'aide des comparaisons interpolées :

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_m - C_a$$
$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_m - C_b$$
. . . . . .

193. **Signal horaire.** — Dans certains ports un signal, lumineux ou sonore, est fait à une heure connue du premier méridien.

Dans les ports de guerre français, le signal consiste dans la chute d'une boule ou le rabattement d'un disque. Le déclenchement est effectué chaque jour à $22^h,0$ puis à $22^h2^m,0$, temps moyen astronomique de Paris.

En observant au compteur les instants de ces signaux, on peut, sans aucun dérangement, obtenir chaque jour l'état de l'instrument; des comparaisons immédiates fournissent ensuite les états des chronomètres.

Lorsque le signal est sonore, il ne faut pas oublier de tenir compte du retard dû à la distance de l'observateur; on peut admettre que la vitesse du son pour une température θ est, en mètres par seconde, égale à $(333 + 0{,}6\,\theta)$.

Détermination de la marche.

194. **Marche diurne.** — La régulation d'un chronomètre n'étant jamais parfaite, l'état absolu varie avec le temps. L'indication de l'état n'est donc complète que si l'on donne l'époque à laquelle il se rap-

porte ; cette époque doit toujours s'exprimer en temps moyen de Paris.

On nomme *marche diurne*, la variation de l'état pour + 1 *jour moyen*. Nous désignerons les marches de divers chronomètres A, B,... par les notations m_a, m_b,...

Nous verrons plus tard que la marche est elle-même variable ; pour un petit nombre de jours on peut la considérer comme constante, et cette hypothèse est d'autant plus plausible que la température a moins varié dans l'intervalle.

La valeur moyenne de la marche s'obtient en divisant la variation de l'état par le temps écoulé, ce dernier étant exprimé en jours et fractions décimales. Si $\mathcal{E}'_a$ et $\mathcal{E}''_a$ sont les états aux époques T' et T'', on a, en supposant T'' postérieur à T' et la différence (T'' — T') exprimée en jours :

$$(23) \qquad m_a = \frac{\mathcal{E}''_a - \mathcal{E}'_a}{T'' - T'}.$$

Pour obtenir la marche d'un chronomètre, il suffit donc de connaître deux états à des époques différentes. Les états étant toujours plus ou moins erronés, il faudrait accorder peu de confiance à une marche qui serait déduite de deux observations isolées faites à deux ou trois jours d'intervalle ; d'autre part, il ne faut pas augmenter outre mesure le dénominateur (T'' — T'), de peur de laisser passer inaperçues des perturbations passagères, accidentelles, et de donner à la température ambiante le temps de varier notablement. Aussi doit-on observer fréquemment, tous les jours s'il est possible, et déduire la marche la plus probable de l'en-

semble d'une dizaine d'observations au plus (n° 196).

Le sextant employé pour la détermination des états par la méthode du n° 179 doit être un excellent instrument dont on connaît la correction d'excentricité ; s'il n'en est pas ainsi, on peut craindre de fortes erreurs systématiques sur les états conclus : il convient alors de ne combiner entre elles que des observations faites d'un même côté du méridien, sensiblement à la même hauteur et relatives au même astre. Les erreurs des états sont en ce cas à très peu près les mêmes, ce dont on se rend facilement compte en considérant la 1re des équations (8) ; l'influence de ces erreurs disparaît donc dans la différence et n'affecte plus la marche.

195. **Calcul de l'heure du premier méridien à l'aide d'un chronomètre réglé.** — Un chronomètre est dit *réglé* lorsqu'on connaît son état et sa marche à une époque récente. On peut alors déduire, à chaque instant, l'heure de Paris des indications de l'instrument, ainsi que nous allons le voir.

Pour la commodité de l'usage, on ramène l'état au midi moyen de Paris qui suit l'instant de sa détermination. A cet effet, si $\mathcal{E}'_a$ désigne l'état observé à l'heure T*mp* de la date n, on calcule l'état $\mathcal{E}''_a$ à 0^h de la date $(n+1)$ par la formule :

$$\mathcal{E}''_a = \mathcal{E}'_a + m_a \cdot \frac{24^h - \mathrm{T}mp}{24},$$

dans laquelle on doit exprimer la différence $(24^h - \mathrm{T}mp)$ en heures et fractions décimales, afin que le rapport $\frac{24 - \mathrm{T}mp}{24}$ soit une fraction de jour moyen.

Ultérieurement, au bout de p jours par exemple, l'état pour l'instant T$mp = 0^h$ de la date $(n+1+p)$ sera évidemment devenu :

$$\mathcal{E}_a = \mathcal{E}''_a + pm_a,$$

en admettant l'invariabilité de la marche diurne dans l'intervalle.

Pour obtenir ensuite l'heure Tmp correspondante à une heure quelconque A du chronomètre ce jour-là (date $n+1+p$), on en calculera d'abord une valeur approchée en écrivant :

$$\mathrm{T}'mp = \mathrm{A} + \mathcal{E}_a,$$

ce qui permettra de calculer la variation $\left(m_a \frac{\mathrm{T}'mp}{24}\right)$ de $\mathcal{E}_a$ depuis 0^h jusqu'à l'instant T$'mp$ très voisin de l'instant cherché. On aura ainsi une deuxième valeur plus précise de ce dernier ;

$$\mathrm{T}''mp = \mathrm{A} + \left(\mathcal{E}_a + m_a \frac{\mathrm{T}'mp}{24}\right) = \mathrm{T}'mp + m_a \frac{\mathrm{T}'mp}{24}.$$

La marche est assez petite, en général, pour que cette deuxième approximation suffise.

Si l'instant chronométrique pour lequel on veut obtenir Tmp est défini par l'heure A et la *date locale*, il faut évidemment commencer par calculer une valeur grossière de Tmp à l'aide de l'heure locale et de la longitude, afin d'éviter toute ambiguïté sur cet élément lui-même (n° 174), et sur la date du midi moyen de Paris précédent.

196. **État et marche les plus probables pendant une période d'observations.** — Con-

sidérons une période de quelques jours pendant lesquels la température a très peu varié autour de sa valeur moyenne ou, ce qui revient au même, pendant lesquels on a réussi à maintenir une température constante dans l'armoire des chronomètres : dans ces conditions, on peut admettre que la marche diurne est demeurée constante.

Supposons que pendant cette période on ait fait n observations d'état absolu, toutes comparables entre elles, c'est-à-dire effectuées dans des conditions aussi identiques que possible, mais sans s'astreindre à des déterminations quotidiennes ni même équidistantes. Nous nous proposons de chercher :

1° la valeur la plus probable de l'état du chronomètre à l'époque moyenne ;

2° la valeur la plus probable de la marche pendant la période.

Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$,... $\mathcal{E}_n$ les états observés aux époques T_1, T_2,... T_n, l'unité de temps étant le jour moyen et l'origine du temps étant quelconque.

L'époque moyenne T est, par définition :

$$T = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n} = \frac{1}{n} \Sigma T_i,$$

d'où l'on tire :

$$(24) \qquad nT = \Sigma T_i.$$

Appelons $\mathcal{E}$ l'état inconnu correspondant à T.

La marche m étant supposée constante, on a, pour chaque époque T_i, d'après l'équation (23) :

$$\mathcal{E}_i - \mathcal{E} = m(T_i - T),$$

d'où

$$(25) \qquad \mathcal{E} + m(T_i - T) - \mathcal{E}_i = 0.$$

En donnant à i toutes les valeurs entières de 1 à n, nous aurons ainsi n équations de condition, linéaires par rapport aux inconnues $\mathcal{E}$ et m. Nous en calculerons les valeurs les plus probables en appliquant au système des n équations la méthode des moindres carrés.

Les quantités mesurées $\mathcal{E}_i$ ayant par hypothèse le même poids, nous formerons les équations normales par la règle ordinaire. Celle relative à $\mathcal{E}$ s'obtient en faisant simplement la somme :

$$n\mathcal{E} + m(\Sigma T_i - nT) - \Sigma\mathcal{E}_i = 0,$$

ou, à cause de l'équation (24) :

$$n\mathcal{E} = \Sigma\mathcal{E}_i,$$

d'où

$$\mathcal{E} = \frac{1}{n}\Sigma\mathcal{E}_i.$$

Ainsi l'état le plus probable à l'époque T est la moyenne des états observés.

Formons l'équation normale relative à m. A cet effet, multiplions chaque équation de condition (25) par le coefficient de m dans cette équation. On a :

$$(26) \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{E}(T_i - T) + m(T_i - T)^2 - \mathcal{E}_i(T_i - T) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

et faisons la somme :

$$\mathcal{E}(\Sigma T_i - nT) + m\Sigma(T_i - T)^2 - \Sigma\mathcal{E}_i(T_i - T) = 0;$$

d'où, à cause de (24) :

$$m = \frac{\Sigma \mathcal{E}_i (T_i - T)}{\Sigma (T_i - T)^2}. \qquad (27)$$

197. A cette dernière formule, l'amiral Perrin substitue la suivante :

$$m' = \frac{(\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_1)(T_n - T_1) + (\mathcal{E}_{n-1} - \mathcal{E}_2)(T_{n-1} - T_2) + \dots}{(T_n - T_1)^2 + (T_{n-1} - T_2)^2 + \dots}. \qquad (28)$$

En calculant une valeur provisoire de la marche à l'aide des états extrêmes, on peut ramener chaque état à la même heure du jour de l'observation ; la formule (28) donne lieu alors à des calculs très simples, puisque toutes les différences de temps sont entières et petites, la plus grande d'entre elles ne dépassant généralement pas 10. L'application de la formule (27), au contraire, exige des calculs assez longs, T étant rarement entier.

Il est facile de démontrer que la formule (28) est identique à celle donnée par la méthode des moindres carrés dans un cas qui se présente fréquemment, celui dans lequel les temps T_i sont distribués symétriquement par rapport à leur moyenne T.

198. Afin de simplifier les calculs en opérant sur de petits nombres, il est bon de retrancher de chaque état le plus petit d'entre eux ; de même on peut retrancher de chaque T_i la valeur de T_1.

Exemple numérique. — Observations d'état absolu faites à Brest, au signal horaire, pendant une période de température sensiblement constante. L'observateur

a noté toutes les mesures comme également bonnes; le compteur employé a été comparé au chronomètre moyen n° 1364 de Délépine immédiatement après chaque observation, par la méthode des coïncidences. Les résultats des observations sont les suivants :

N° DE L'OBS^{on} i	DATE	ÉTAT DU CHR. N° 1364 POUR $10^h,0$ $Tmcp$.
1	1906. Mai. 27	$2^h.6^m.21^s,0$
2	28	25,0
3	29	28,7
4	30	31,2
4	31	34,5
6	Juin. 1	37,8
7	2	40,7
8	4	47,0
9	5	50,5
10	6	54,0

On demande les valeurs les plus probables de l'état et de la marche à l'époque moyenne.

Suivant les prescriptions du n° 198, on retranchera $2^h.6^m.21^s.0$ de tous les états observés, et on comptera les T_i à partir de l'époque du premier signal, $Tmcp = 1906.$ Mai. 27. $10^h,0$.

En appliquant la méthode des moindres carrés, on aura ensuite :

$$T = \frac{1}{n}\Sigma T_i, \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{n}\Sigma \mathcal{E}_i, \qquad m = \frac{\Sigma \mathcal{E}_i (T_i - T)}{\Sigma (T_i - T)^2},$$

i	T_i	$\mathcal{E}_i$	$T_i - T$	$\mathcal{E}_i(T_i - T)$	$(T_i - T)^2$	v	vv
1	0	0s,0	4s,80	0s,00	+ 23s,04	+ 0,596	0,355
2	1	4 ,0	3 ,80	— 15 ,20	14 ,44	— 0,187	035
3	2	7 ,7	2 ,80	— 21 ,56	7 ,84	— 0,669	448
4	3	10 ,2	1 ,80	— 18 ,36	3 ,24	+ 0,048	002
5	4	13 ,5	— 0 ,80	— 10 ,80	0 ,64	— 0,034	001
6	5	16 ,8	+ 0 ,20	+ 3 ,36	0 ,04	— 0,116	014
7	6	19 ,7	1 ,20	+ 23 ,64	1 ,44	+ 0,201	040
8	8	26 ,0	3 ,20	+ 83 ,20	10 ,24	+ 0,336	113
9	9	29 ,5	4 ,20	+ 123 ,90	17 ,64	+ 0,054	003
10	10	33 ,0	+ 5 ,20	+ 171 ,60	27 ,04	— 0,229	052
$\Sigma T_i = 48$		$\Sigma \mathcal{E}_i = 160,4$		— 65 ,92	105 ,60		$[vv] = 1,063$
				+ 405 ,70			

$T = 4,80 \quad \mathcal{E} = 16^s,04 \quad \Sigma \mathcal{E}_i (T_i - T) = + 339,78 \quad m = + \frac{339,78}{105,60} = + 3^s,218$

$0^j,8 = 19^h,2.$

L'époque T est, en temps moyen civil de Paris:

Mai. 31. $10^h,0 + 19^h,2 =$ Juin. 1: $5^h,2.$

En restituant la constante $2^h.6^m.21^s,0$ retranchée de tous les états, on a ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E} = 2^h.6^m,37^s,0 \\ m = + 3^s,22 \end{array}\right\} \text{ à } T_{mp} = 17^h,2 \text{ le 31 mai 1906.}$$

L'erreur probable d'une observation isolée est :

$$r = 0,6745 \sqrt{\frac{1,063}{10 - 2}} = \pm 0^s,26.$$

L'erreur probable de $\mathcal{E}$ est : $r_\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{10}} = \pm 0^s,08.$

L'erreur probable de m est :

$$r_m = \frac{r}{\sqrt{105,6}} = \pm 0^s,02.$$

En calculant la marche par la formule (28), on a :

$$m' = \frac{33{,}0\times 10 + 25{,}5\times 8 + 18{,}3\times 6 + 9{,}5\times 3 + 3{,}3\times 1}{100 + 64 + 36 + 9 + 1} = +3^{s},217.$$

La différence entre m et m' est tout à fait négligeable. La série d'observations est en effet très régulière : seule, l'observation du 3 juin n'a pu être faite.

199. **Vérification de l'état en vue de terre.** — Lorsqu'on passe en vue de terre au cours d'une traversée, il est prudent de vérifier les états des chronomètres. On prend, dans ce but, une série de hauteurs du Soleil à l'horizon de la mer, en opérant autant que possible aux circonstances favorables.

On détermine ensuite la position du navire au moyen de relèvements ou de segments capables, et l'on fait un calcul d'heure comme il est dit au n° 179. Les états obtenus serviront à corriger les états calculés à l'aide des marches, mais seulement dans le cas où les divergences seraient notables, car il ne faut pas oublier que les hauteurs prises à l'horizon de la mer sont altérées du fait de l'incertitude de la dépression.

Variations des marches.

200. Il faut distinguer entre les variations anormales et les variations normales. Les premières reconnaissent une multitude de causes : chocs, trépidations, actions électriques ou magnétiques, oxydation des pièces du mécanisme, variations de l'état hygrométrique de l'air jointes à un défaut de fermeture, etc. Elles échappent

à toute analyse et il est impossible de les prévoir. On doit mentionner aussi les variations brusques nommées *sauts* qui altèrent la marche d'une façon permanente lorsqu'ils sont dus à quelque déplacement d'une pièce du mécanisme ou qui modifient l'état seul lorsqu'ils proviennent d'un mauvais fonctionnement accidentel de l'échappement. La comparaison des chronomètres entre eux permet généralement de mettre ces variations en évidence et de les éliminer.

Les variations normales, au contraire, peuvent être calculées. Elles sont dues à deux causes :

1° La température, dont l'action variable modifie la fluidité des huiles. Elle altère en outre le moment élastique du spiral et le moment d'inertie du balancier; par la *compensation* on arrive bien à atténuer fortement cet effet, mais il subsiste néanmoins une *erreur secondaire*.

2° Le temps, qui produit un épaississement graduel des huiles, l'usure des pivots et contre-pivots, et des changements moléculaires d'où résulte une altération lente et progressive de l'élasticité du spiral.

201. **Formule des marches.** — La marche d'un chronomètre soustrait aux causes perturbatrices de la 1re catégorie (variations anormales) est une fonction continue du temps et de la température. Ce fait est établi par des observations nombreuses; les travaux de l'ingénieur hydrographe Lieussou, notamment, le mettent hors de doute. Soit donc

$$m = f(T,\theta),$$

la fonction continue qui représente la marche. En dé-

signant par m_0 la marche correspondante aux valeurs arbitraires T_0 et θ_0 des variables, on a, par la série de Taylor :

$$m = m_0 + \frac{\partial m}{\partial T}(T - T_0) + \frac{\partial m}{\partial \theta}(\theta - \theta_0)$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial T^2}(T - T_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial \theta^2}(\theta - \theta_0)^2$$
$$+ \frac{\partial^2 m}{\partial T \partial \theta}(T - T_0)(\theta - \theta_0) + \dots$$

Les diverses dérivées dans lesquelles on doit faire $T = T_0$ et $\theta = \theta_0$ sont les constantes du chronomètre ; on a l'habitude de les représenter par les lettres a, b,... et la formule s'écrit :

(29)
$$m = m_0 + a(T - T_0) + b(\theta - \theta_0) + a'(T - T_0)^2$$
$$+ c(\theta - \theta_0)^2 + d(T - T_0)(\theta - \theta_0) + \dots$$

Lieussou et Pagel ont démontré que le développement pouvait être limité aux termes du deuxième ordre pour les chronomètres suivis dans les observatoires ; le commandant de Magnac a vérifié que ce résultat s'étendait aux chronomètres embarqués.

On prend généralement $\theta_0 = 0$ et l'on compte le temps à partir de la 1re observation ; la formule (29) devient alors, les coefficients ayant les valeurs qui conviennent à cet état initial des variables :

(30) $$m = m_0 + aT + b\theta + a'T^2 + c\theta^2 + dT\theta.$$

202. On détermine les coefficients de cette formule par l'observation ; mais avant de nous occuper de cette question, nous ferons connaître les résultats généraux auxquels les observateurs ont été conduits.

1° Les coefficients a' et d sont ordinairement nuls ou négligeables, ce qui permet d'écrire la formule (30) sous la forme

$$m = m_0 + aT + b\theta + c\theta^2. \tag{31}$$

On peut alors éliminer le terme $b\theta$ en posant :

$$\begin{cases} m_0 = m'_0 + \dfrac{b^2}{4c}, \\ b = -2c\Theta. \end{cases} \tag{32}$$

Ce qui donne :

$$m = m'_0 + aT + c(\Theta - \theta)^2. \tag{33}$$

C'est la formule de Lieussou. Elle est applicable à la plupart des chronomètres ; cependant, si la compensation laissait à désirer, Θ pourrait acquérir une grande valeur, gênante pour le calcul, et il vandrait mieux s'en tenir à la forme (31). Θ se nomme *température de réglage*.

2° Θ est ordinairement comprise entre 12° et 20° ; elle se montre d'une stabilité remarquable.

c est, après Θ, le coefficient le plus constant ; a n'est pas très certain.

Enfin c'est sur m'_0 que portent la plupart des perturbations ou sauts brusques[1].

203. **Détermination des coefficients.** — Quand on dispose du nombre d'observations nécessaires (six au moins) dont plusieurs faites à des températures très différentes, on écrit l'équation de condition (29) pour chaque marche observée et on applique soit la méthode des moindres carrés, soit la méthode de Cau-

[1] Caspari, 1.

chy qui est moins laborieuse. On choisit pour T_0 et θ_0 des valeurs voisines de leurs moyennes, afin de n'avoir pas à opérer sur de trop grands nombres.

On préfère généralement recourir aux méthodes graphiques, moins précises sans doute, mais qui ont le précieux avantage de montrer si la continuité de la fonction est réelle, ou du moins de permettre de distinguer les périodes où elle l'est de celles où elle cesse d'offrir ce caractère.

Il importe tout d'abord de remarquer que le coefficient a, nommé coefficient d'*accélération*, présente, dans le cas d'un chronomètre *neuf*, des valeurs irrégulières et croissantes dont l'effet se manifeste d'autant plus vite que les variations de la température sont plus étendues; cet effet ne doit pas être confondu avec celui de l'action normale de la température qu'il vient souvent masquer, et il s'atténue au bout d'un temps assez court. L'accélération particulière aux chronomètres neufs paraît due à des variations de forme et d'état moléculaire qui se produisent dans les spiraux et balanciers.

On doit se préoccuper en premier lieu de la détermination des coefficients de la température : ce sont ceux qui sont effectivement les plus constants et dont l'effet est le plus marqué, hors le cas qui vient d'être envisagé. Cette détermination serait aisée si l'on disposait d'une étuve permettant d'observer des marches à température constante suivant la méthode du n° 196. Trois observations à des températures artificielles très différentes suffiraient à donner de bonnes valeurs des coefficients m'_0, c et Θ de la formule (33), en négligeant le terme aT dont les deux facteurs seraient très faibles; d'ailleurs, par des observations isothermes faites

au début et à la fin de la période d'observations, on aurait le moyen d'estimer a et d'en tenir compte. En général on est obligé de s'en remettre aux vicissitudes des saisons pour obtenir des variations notables de θ; ces variations ne s'obtenant dès lors que très lentement, le temps ferait généralement défaut si l'on voulait s'en tenir à ses propres observations avant le départ pour une campagne; mais comme les chronomètres séjournent habituellement quelques mois à l'Observatoire du port avant d'être délivrés aux navires, les marches qui y auront été déterminées pourront servir aux calculs des coefficients de température : le changement de régime entre l'Observatoire et le bord paraît en effet n'affecter que le terme m_0. Si l'on part de France en hiver pour s'acheminer vers les pays chauds, on aura soin de déterminer la marche en rade, à chaque relâche, et l'on aura bientôt tous les éléments nécessaires au calcul des coefficients.

Pour ce calcul on a recours habituellement, nous l'avons dit, aux méthodes graphiques. Celle de M. Réveille, professeur d'hydrographie, paraît être la plus simple et la plus commode.

204. **Méthode de M. Réveille.** — Écrivons la formule (30) sous la forme

$$m = (m_0 + a\mathrm{T} + a'\mathrm{T})^2 + b\theta + d\mathrm{T}\theta + c\theta^2,$$

et posons :

$$(34) \qquad \begin{cases} m_0'' = m_0 + a\mathrm{T} + a'\mathrm{T}^2, \\ b' = b + d\mathrm{T}. \end{cases}$$

L'expression de la marche devient alors :

$$(35) \qquad m = m_0'' + b'\theta + c\theta^2.$$

Supposons que pendant la période des observations, limitée à quelques semaines, les comparaisons des chronomètres entre eux n'aient révélé aucune variation anormale de m_0; supposons en outre que les coefficients a, a' et d soient sinon nuls, du moins très petits, ce qui est le cas général. On pourra dans ces conditions admettre que m_0'' et b' sont des constantes dont les valeurs, à chaque observation, ne diffèrent pas sensiblement de celles correspondantes à l'époque milieu de la période.

La formule (35) donne, par différentiation :

$$\frac{dm}{d\theta} = b' + 2c\theta,$$

et, en posant :

$$y = \frac{dm}{d\theta}, \tag{36}$$

on a :

$$y = b' + 2c\theta, \tag{37}$$

équation d'une droite que l'on construira en coordonnées rectangulaires, relativement à deux axes Oy, $O\theta$.

A cet effet, soient m_1, m_2, ... m_n des marches observées aux températures θ_1, θ_2, ... θ_n supposées rangées par ordre de grandeur.

L'équation (36) donne :

$$dm = y d\theta.$$

Intégrons entre deux températures quelconques, θ_3 et θ_4 par exemple. On a :

$$m_4 - m_3 = \int_{\theta_3}^{\theta_4} y d\theta.$$

Or le deuxième membre n'est autre que l'aire du trapèze $\theta_3 HK\theta_4$; si nous prenons le point D équidistant des points θ_3 et θ_4 on a :

$$OD = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}.$$

Aire $\theta_3 HK\theta_4 = ED \,.\, (\theta_4 - \theta_3)$;

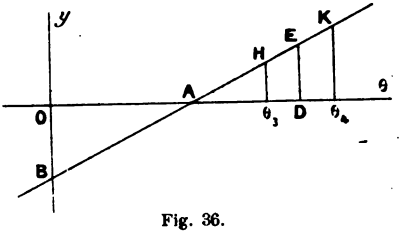


Fig. 36.

d'où

$$ED = \frac{m_4 - m_3}{\theta_4 - \theta_3}.$$

Ainsi le point E de la droite correspondant aux observations 3 et 4 a pour abscisse $\frac{\theta_3 + \theta_4}{2}$, et pour ordonnée la quantité ED immédiatement calculable.

Cela posé, pour tracer la droite on calculera les coordonnées

$$\theta' = \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}, \quad y' = \frac{m_2 - m_1}{\theta_2 - \theta_1},$$

$$\theta'' = \frac{\theta_3 + \theta_2}{2}, \quad y'' = \frac{m_3 - m_2}{\theta_3 - \theta_2},$$

$$\theta''' = \frac{\theta_4 + \theta_3}{2}, \quad y''' = \frac{m_4 - m_3}{\theta_4 - \theta_3}.$$

. . . . . .

Avec n observations on obtiendra ainsi $(n-1)$ points ; on tracera ensuite la droite qui se rapproche le plus de tous ces points.

La droite coupe l'axe des températures en un point A d'abscisse x telle que

$$b' + 2cx = 0.$$

On a donc $x = \Theta$ d'après la deuxième des équations (32) dans le cas où, d étant nul, $b = b'$ et la loi de Lieussou est, par suite, applicable.

On aura b' en relevant l'ordonnée du point d'intersection B de la droite avec l'axe des y.

Enfin m_0'' s'obtiendra en relevant l'ordonnée y_0 dont l'abscisse est $\frac{\theta_i}{2}$, car m_0'' correspond à $\theta = 0$ et l'on a :

$$\theta_0 = \frac{\theta_i + 0}{2}, \qquad y_0 = \frac{m_i - m_0''}{\theta_i - 0},$$

d'où

$$m_0'' = m_i - \theta_i y_0.$$

i est le numéro d'une observation quelconque ; il vaut mieux prendre $i = 1$, parce qu'à une même erreur graphique commise en relevant y_0 l'erreur commise sur m_0'' est ainsi moindre.

Dès que l'on aura porté plus de deux points sur le graphique, on verra d'un coup d'œil s'ils sont sensiblement alignés, et par suite si les hypothèses du début sont admissibles.

205. Voyons maintenant comment l'on peut utiliser le graphique à la mer pour le calcul d'une marche.

Supposons pour plus de généralité que, depuis l'observation de la dernière marche m_n ayant servi au tracé de la droite, m''_0 ait varié soit par l'effet du temps dont la valeur est devenue sensible dans la première des équations (34), soit pour toute autre cause. Si le terme dT est toujours insensible, le graphique peut encore servir, car b' et c seuls déterminent la droite.

Soit m_p la dernière marche observée en rade avant le départ à la température θ_p, et soit m la marche à trouver pour une température moyenne observée θ. On aura comme plus haut :

$$\theta^{(p)} = \frac{\theta + \theta_p}{2}, \qquad y^{(p)} = \frac{m - m_p}{\theta - \theta_p},$$

d'où $$m = m_p + y^{(p)}(\theta - \theta_p).$$

Ainsi il suffit de relever l'ordonnée $y^{(p)}$ du point d'abscisse $\frac{\theta + \theta_p}{2}$.

206. Ultérieurement, si l'on considère une deuxième série de points portés sur la graphique pendant une période de tranquillité relative de m_0, on trouvera une deuxième droite parallèle à la première si, le coefficient c étant resté invariable, le terme dT a acquis une valeur sensible. On aura ainsi le moyen de calculer d, dont l'effet est de faire glisser la droite parallèlement à elle-même.

On pourra aussi, en déterminant les valeurs successives de m''_0 dans le cours de la campagne, mettre l'accélération en évidence et en estimer la grandeur.

207. **Constance de la température.** — Sans recourir à l'installation compliquée d'une étuve, on

peut obtenir une température sensiblement constante et d'environ 30° en chauffant l'intérieur de l'armoire avec une lampe dont la cheminée est disposée de telle sorte que la fumée ne puisse pénétrer dans le compartiment des montres. On conçoit combien la conduite des chronomètres est facilitée par ce dispositif, qui a été employé pour la première fois par l'ingénieur hydrographe Givry dans la campagne hydrographique de la *Bayadère*.

208. **Marches relatives.** — Les chronomètres doivent être remontés tous les matins, sensiblement à la même heure.

Le remontage effectué, on procède à la comparaison du compteur avec chacun des chronomètres. On en déduit les comparaisons des chronomètres entre eux. Pour cela, soient (A — M), (B — M), (C — M) ... les comparaisons du compteur aux divers chronomètres. On a évidemment :

$$A - B = (A - M) - (B - M),$$

$$A - C = (A - M) - (C - M).$$

. . . . . .

On calcule ensuite les marches relatives comme nous allons l'indiquer.

On nomme *marche relative* de deux chronomètres A et B la différence $(m_a - m_b)$ de leurs marches diurnes.

Soient T*mp* et T'*mp* les heures des comparaisons pour deux jours consécutifs. L'intervalle des compa-

raisons étant sensiblement égal à un jour moyen, on a

$$(T'mp - A') - (Tmp - A) = \mathcal{E}'_a - \mathcal{E}_a = m_a,$$
$$(T'mp - B') - (Tmp - B) = \mathcal{E}'_b - \mathcal{E}_b = m_b,$$
. . . . . .

d'où l'on tire par différence :

$$m_a - m_b = -A' + B' + A - B = (A - B) - (A' - B').$$

Ainsi la marche relative de deux chronomètres s'obtient en retranchant la comparaison pour un certain jour de celle de la veille.

209. **Calcul de la marche à la mer. — Contrôle réciproque des chronomètres.** — Les coefficients de la formule générale des marches étant supposés connus, on détermine par le calcul ou graphiquement (n° 205) la marche moyenne pendant une période de p jours. A cet effet, on fait usage d'une marche de base convenant à l'origine de la période; la température s'obtient en prenant la moyenne des températures relevées au moment du remontage (9 heures du matin), moyenne que l'on peut considérer comme sensiblement égale à la température moyenne de la période. On prend ordinairement $p = 5$; on doit diminuer ce nombre si la température varie rapidement.

Au départ, on adopte comme marche de base la dernière marche observée en rade; pour les périodes suivantes, la marche de base est calculée par la *méthode des marches relatives*, qui a pour but de mettre en évidence les variations accidentelles du terme m_0 et de s'en affranchir autant que possible.

Au cours d'une période on se sert, pour calculer

l'état en vue des observations courantes, de la marche de la période précédente; sauf variations accidentelles considérables que l'on constaterait par l'examen des marches relatives, ce procédé est suffisamment précis.

Pour appliquer la méthode des marches relatives on choisit l'un des chronomètres, A par exemple, comme étalon. Ce sera la montre en laquelle on aura le plus de confiance; on lui rapportera les diverses comparaisons et on tirera l'heure de Paris de ses indications, comme nous allons l'indiquer.

Les navires de guerre ont en général deux chronomètres et un compteur; si le compteur a des marches régulières, on s'en sert comme d'un troisième chronomètre. Ayant déterminé comme il est dit plus haut les marches probables m'_a, m'_b, m'_m pendant une période à l'aide des marches de base et de la température, on fait les moyennes des marches relatives $(m_a - m_b)$, $(m_a - m_m)$ observées pendant la période. Si les chronomètres n'ont pas éprouvé de variations accidentelles, on doit avoir:

$$m_a = m'_a$$
$$m_a = m'_b + (m_a - m_b),$$
$$m_a = m'_m + (m_a - m_m),$$

d'où trois valeurs pour la marche de l'étalon. Si ces valeurs concordent dans des limites acceptables, on en fait la moyenne et on adopte ce nombre comme marche la plus probable de A. Mais si l'une des montres, B par exemple, a éprouvé une perturbation, m'_b est différente de la marche réelle et la valeur donnée pour m_a par la deuxième ligne est en désaccord avec les autres :

on l'écarte et on adopte la moyenne des deux autres.

Ayant ainsi déterminé la marche la plus probable de l'étalon pendant la période, on en conclut les valeurs les plus probables des autres marches en écrivant :

$$m_b = (m_a \text{ adopté}) - (m_a - m_b),$$
$$m_m = (m_a \text{ adopté}) - (m_a - m_m).$$

Ces trois marches servent ensuite de marches de base pour la période suivante. La connaissance des états absolus des montres subordonnées B et M est inutile; on conclut l'heure de Paris à un instant quelconque de l'indication de l'étalon corrigée de son état calculé à l'aide de la marche la plus probable obtenue pour la précédente période.

Si l'on possédait deux montres seulement, on ne saurait à laquelle attribuer les perturbations mises en évidence par les marches relatives. Il faut donc trois chronomètres au moins pour prédire l'heure de Paris avec quelque certitude; ce nombre est à la rigueur suffisant, car il est bien rare que deux montres sautent à la fois et surtout dans le même sens.

On démontre aisément que le calcul de l'heure de Paris au moyen de l'indication de l'étalon seul et de son état conclu des marches relatives revient à calculer chacun des états comme si les chronomètres étaient isolés et à prendre la moyenne des heures de Paris déduites de chacun d'eux, sauf à écarter celle qui est en désaccord manifeste avec les deux autres.

Si, d'un jour à l'autre, les marches relatives montrent tout à coup une variation sensible du chronomètre A, on doit clore la période des moyennes au

jour précédent: il n'est cependant pas nécessaire de changer d'étalon, à moins de variations exceptionnelles provenant d'une avarie de la montre. On peut continuer à se servir des indications de l'instrument, mais il convient alors de réduire au minimum l'incertitude que peut présenter son état à un moment donné, en réduisant les périodes ultérieures à leur minimum de durée, c'est-à-dire à un jour. Généralement la montre troublée reprend assez vite une marche régulière, ce qui est indiqué par les marches relatives quotidiennes; on peut alors revenir aux périodes de 5 jours ou plus, ce qui n'a d'ailleurs pour but que de rendre les calculs des marches moins fréquents.

Il va sans dire que les comparaisons doivent être prises par la méthode des coïncidences (n° 176); autrement il est impossible de se rendre compte, d'un jour à l'autre, de la régularité des marches relatives.

CHAPITRE V

DÉTERMINATION D'UN LIEU DU NAVIRE

Cercle de hauteur.

210. Du centre C de la Terre, décrivons une sphère de rayon arbitraire, et prenons pour plan de la figure le grand cercle PZ_pQ détaché sur cette sphère par le méridien de Paris.

Soient PZH le méridien de l'observateur et QHB le grand cercle détaché par l'équateur.

Menons CZ parallèle à la verticale du lieu d'observation.

Le point d'intersection Z de CZ avec la surface de la sphère est ce que nous nommons l'image du zénith de l'observateur.

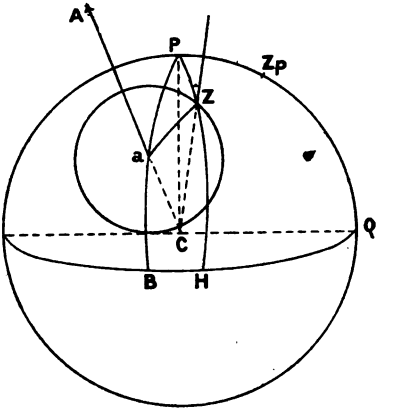


Fig. 37.

Les arcs ZH et QH, affectés des signes convenables, représentent respectivement la latitude astronomique et la longitude du lieu. Il est donc bien facile de placer le point Z sur la sphère à l'aide des coordonnées du lieu sur la Terre; réciproquement, si l'on parvient à placer Z sur la sphère géocentrique, les coordonnées de l'observateur sont déterminées et le *problème du point* est résolu.

Considérons un astre situé dans la direction CA, et soit *a* l'intersection de la demi-droite CA avec la sphère.

A l'aide du chronomètre et de la *C. des T.* on peut, à tout instant, placer le point *a* sur la sphère. En effet, nous aurons la longitude G_a du méridien P*a*B de l'astre en posant :

$$G_a = T_{ap}, \quad \text{si} \quad T_{ap} < 12^h,$$

$$G_a = -(24^h - T_{ap}), \quad \text{si} \quad T_{ap} > 12^h.$$

Dans le cas de la figure on a :

$$G_a = +QB.$$

D'autre part, à l'instant envisagé on a :

$$T_{ap} = T_{mp} + \text{Æ}m - \text{Æ}a.$$

Le chronomètre donne T_{mp}; la *Connaissance des Temps* donne Æ*m* et Æ*a* en fonction de cet élément. Ainsi G_a est connu à tout instant.

De plus, la *Connaissance des Temps* fait connaître la déclinaison D_a de l'astre; or cet angle n'est autre que l'inclinaison de C*a* sur l'équateur, c'est-à-dire la latitude du point *a* sur la sphère.

Le point *a*, déterminé par sa longitude et sa latitude, est connu.

Supposons maintenant que l'observateur prenne, au sextant, la hauteur de l'astre A en notant l'heure correspondante du chronomètre. En réduisant cette hauteur au centre de la Terre comme il a été dit au chapitre III, il lui sera facile d'en conclure l'arc de grand cercle Za, qui n'est autre que le complément de la hauteur vraie. D'ailleurs, si l'on décrit du point a comme pôle un petit cercle de rayon sphérique égal à la distance zénithale vraie Za, on voit que l'on obtient ainsi un lieu du point Z à l'instant de l'observation, car pour tout point non situé sur la circonférence la distance zénithale vraie est nécessairement différente de Za.

Une observation de hauteur à une heure notée au chronomètre conduit donc à la connaissance d'un petit cercle, lieu géométrique de l'image du navire sur la sphère géocentrique. Ce petit cercle est appelé *cercle de hauteur ;* le chronomètre permet, comme nous l'avons vu, d'en déterminer le pôle, et le sextant en donne le rayon sphérique.

211. **Courbes de hauteur.** — On donne le nom de *courbe de hauteur* à l'image d'un cercle de hauteur sur la carte représentant la sphère géocentrique dans le système de Mercator.

L'étude des courbes de hauteur est très intéressante, mais la place nous fait défaut pour traiter ici la question[1]. Nous nous contenterons d'énoncer les propriétés principales de ces courbes.

Les cercles de hauteur peuvent être classés en trois

[1] Yvon Villarceau et de Magnac, 1, chap. II. — Guyou, 1, § II.

espèces, à chacune desquelles correspond un genre particulier de courbes.

212. **Cercles et courbes de première espèce.** — Le caractère analytique est la condition $\frac{\cos h}{\cos (\mathfrak{L})} < 1$, qui répond au cas des pôles extérieurs au cercle de hauteur.

La courbe de première espèce a la forme ovale indiquée sur la figure; elle est fermée, convexe en tous ses points et admet un centre O situé à l'intersection de deux diamètres rectangulaires qui sont le méridien SB de l'astre et le parallèle MK équidistant des parallèles extrêmes. Ces derniers ont pour latitudes sur la sphère $(\mathfrak{L} - n)$ et $(\mathfrak{L} + n)$, en appelant n la distance zénithale vraie.

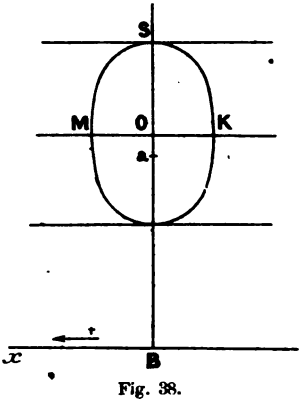


Fig. 38.

Les demi-axes OS, OK sont liés entre eux par la formule des latitudes croissantes

$$\mathrm{OS} = \mathfrak{L}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mathrm{OK}}{2}\right).$$

L'image a de l'astre est un point excentrique situé entre le centre O et l'équateur.

En appelant x la longitude d'un point quelconque de la courbe, comptée à partir du méridien central SB, on a : $-90^\circ < x < +90^\circ$.

213. **Cercles et courbes de deuxième espèce.** — Le caractère de ces courbes est $\frac{\cos h}{\cos (\mathfrak{L})} > 1$, ce qui répond au cas du pôle intérieur au cercle de hauteur.

La courbe circule dans une zone de 360° de développement et dont les parallèles extrêmes ont pour latitudes sur la sphère $(\mathfrak{L} \mp n)$ et $(\pm 180° - (\mathfrak{L} \mp n)$,

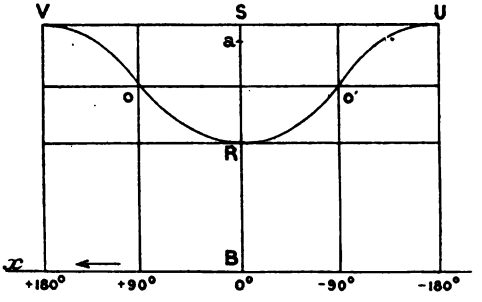


Fig. 39.

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur selon que l'astre est dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud; elle se compose d'une seule branche d'aspect sinusoïdal, symétrique par rapport au méridien SB de l'astre. Rapportée à ce méridien et à l'équateur Bx, la courbe présente deux points d'inflexion O et O' dont les abscisses sont $+ 90°$ et $- 90°$ et qui sont situés, d'autre part, sur le parallèle milieu de la zone; ces points d'inflexion sont des centres.

La courbe tangente les parallèles extrêmes en trois points V, R, U. Lorsque $(\mathfrak{L}) > 0$, le point minimum R est sur le méridien de l'astre, les points maxi-

mums ont pour abscisses $+ 180°$ et $- 180°$. Quand Φ change de signe sans changer de valeur absolue, la courbe se transforme en sa symétrique par rapport à l'équateur.

Pour $-90° < x < +90°$, la courbe tourne sa concavité vers l'image a de l'astre; en dehors de ces limites, elle présente au contraire sa convexité à l'astre.

214. A l'exception des méridiens qui passent par les pôles, tous les autres grands cercles de la sphère sont de deuxième espèce. Ils ont donc pour images des courbes de deuxième espèce; mais les points d'inflexion sont sur l'équateur, en sorte que toute portion de la courbe située dans un seul hémisphère est constamment concave vers l'équateur.

L'équateur coïncide avec le cercle de hauteur d'un astre situé à l'un des pôles et observé à l'horizon ($n = 90°$). Les parallèles limites ont pour latitude zéro et par suite la courbe se réduit à l'équateur de la carte, ainsi qu'il le fallait.

215. **Cercles et courbes de troisième espèce.** — Lorsqu'on a $\frac{\cos h}{\cos \Phi} = 1$, le cercle de hauteur passe par l'un des pôles de la sphère. Le cercle et la courbe sont dits de troisième espèce.

La courbe se compose d'une branche unique, symétrique par rapport au méridien de l'astre, et asymptote aux méridiens situés à 90° de part et d'autre de ce dernier. Elle tourne constamment sa concavité vers l'image de l'astre et présente un point maximum ou minimum; ce point est situé sur le méridien de l'astre,

et a pour latitude sur la sphère $(\mathfrak{D} \mp n)$, selon que $\mathfrak{D}$ est positive ou négative.

Toutes les courbes de troisième espèce sont superposables. Toutefois, lorsque $\mathfrak{D} = 0$, le cercle de hauteur devient un méridien si l'astre est à l'horizon; la courbe est de troisième espèce, mais elle se réduit à ses asymptotes.

216. **Rayon de courbure d'une courbe de hauteur.** — Sur la sphère nous rapporterons les points du cercle de hauteur à l'équateur et au méridien de l'astre pris pour premier méridien; sur la carte nous rapporterons les points de la courbe aux axes images de ces deux grands cercles.

Un point (L, G) a pour image un point (x, y); si la carte représente en vraie grandeur la sphère géocentrique, on doit faire $K = 1$ et $\varepsilon = 0$ dans les équations (2) et (3) du n° 33, et l'on a :

$$(1) \qquad y = \mathfrak{L} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{L}{2}\right), \qquad x = G.$$

t étant l'angle horaire de l'astre pour le point (L, G), on a, d'après la convention qui précède :

$$x = -t, \quad \text{si} \quad t < \pi,$$
$$x = 2\pi - t, \quad \text{si} \quad t > \pi,$$

le sens positif des longitudes étant, comme toujours, le sens Est-Ouest.

On a ainsi :

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = -dt, \\ \sin x = -\sin t, \\ \cos x = \cos t. \end{cases}$$

Cela posé, le triangle de position nous donne :

(3) $\sin h = \sin \mathrm{L} \sin (\mathfrak{D}) + \cos \mathrm{L} \cos (\mathfrak{D}) \cos t,$

(4) $$\sin t = \frac{\cos h}{\cos (\mathfrak{D})} \sin \mathrm{Z},$$

(5) $-\cos h \cos \mathrm{Z} = \sin (\mathfrak{D}) \cos \mathrm{L} - \cos (\mathfrak{D}) \sin \mathrm{L} \cos t,$

(6) $\cos (\mathfrak{D}) \cos t = \sin h \cos \mathrm{L} + \cos h \sin \mathrm{L} \cos \mathrm{Z}.$

Nous allons en déduire les coefficients différentiels qui entrent dans l'expression du rayon de courbure ρ :

$$\rho = \pm \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Lorsque le point (L, G) se déplace sur le cercle de hauteur, $(\mathfrak{D})$ et h restent invariables; en différentiant (1) et (3) dans cette hypothèse, on a :

$$\frac{dy}{dt} = \sec \mathrm{L} \frac{d\mathrm{L}}{dt},$$

$$0 = (\cos \mathrm{L} \sin (\mathfrak{D}) - \sin \mathrm{L} \cos (\mathfrak{D}) \cos t) \frac{d\mathrm{L}}{dt} - \cos \mathrm{L} \cos (\mathfrak{D}) \sin t,$$

ou, par (5) et (4) :

$$\frac{d\mathrm{L}}{dt} = - \frac{\cos \mathrm{L} \cos (\mathfrak{D}) \sin t}{\cos h \cos \mathrm{Z}} = - \cos \mathrm{L} \operatorname{tg} \mathrm{Z};$$

d'où

$$\frac{dy}{dt} = - \operatorname{tg} \mathrm{Z},$$

et, à cause de (2) :

(7) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \mathrm{Z}.$$

Ce résultat aurait pu être écrit *a priori*, puisque l'on sait que la carte conserve les angles.

Différentiant (7) par rapport à x, on a :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 Z} \cdot \frac{dZ}{dx} = -\frac{1}{\cos^2 Z} \frac{dZ}{dt},$$

et (4) nous donne

$$\cos t = \frac{\cos h}{\cos \text{(L)}} \cos Z \frac{dZ}{dt};$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sec^3 Z \frac{\cos t \cos \text{(L)}}{\cos h}.$$

On a d'ailleurs :

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 Z = \sec^2 Z,$$

$$\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}} = \sec^3 Z;$$

d'où, en remplaçant dans l'expression de ρ :

$$(8) \qquad \rho = \pm \frac{\cos h}{\cos \text{(L)} \cos t}.$$

Par l'équation (4) on voit que si $\frac{\cos h}{\cos \text{(L)}} < 1$ (courbes de première espèce), $\sin t$ ne peut atteindre les limites ± 1 ; par suite, $\cos t$ n'est jamais nul et ρ reste fini : la courbe n'a pas de point d'inflexion, ce qui s'accorde avec la propriété énoncée au n° 212. On peut de même vérifier, par les formules qui précèdent, l'existence des points d'inflexion des courbes de deuxième espèce.

217. Exprimant ρ en minutes d'arc de grand cercle, c'est-à-dire en minutes d'équateur de la carte, on a, abstraction faite du signe :

$$\rho = \frac{1}{\text{arc } 1'} \cos h \text{ séc } \mathfrak{L} \text{ séc } t = 3438' \cos h \text{ séc } \mathfrak{L} \text{ séc } t.$$

Ce qui montre que ρ est très grand pour les petites et moyennes valeurs de h.

La courbure $\frac{1}{\rho}$ a pour expression, à cause de l'équation (6) :

$$(9) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos \mathfrak{L} \cos t}{\cos h} = \text{tg } h \cos \text{L} + \sin \text{L} \cos \text{Z}.$$

Nous en ferons usage bientôt.

Droite de hauteur.

218. Le tracé direct du cercle de hauteur sur un globe matériel représentant la sphère géocentrique constitue un moyen simple d'obtenir un lieu du navire (n° 210). Mais il faudrait employer un globe de dimensions tout à fait inacceptables dans la pratique : pour représenter le mille par une longueur de 1^{mm} seulement, le rayon de la sphère devrait être supérieur à 3 mètres.

La substitution à la sphère de la carte marine générale serait sujette aux mêmes inconvénients ; en outre, la construction du lieu, transformé en une courbe transcendante, serait très compliquée, sauf dans quelques cas très particuliers.

Il semble donc que l'on soit obligé de recourir au calcul seul pour obtenir les coordonnées du navire par

l'intersection de deux lieux astronomiquement déterminés. Cependant, en se basant sur ce que la position du navire est approximativement connue par les procédés de l'estime, on peut calculer les éléments nécessaires au tracé sur une carte à grands points d'une portion restreinte du lieu sur laquelle le navire est assuré de se trouver.

Comme cette partie utile du lieu se réduit à une droite, il suffit d'en calculer un point et la direction; le tracé est donc fort simple.

Le tracé d'un lieu géométrique a d'ailleurs cet avantage que toute observation peut être calculée aussitôt qu'elle vient d'être faite; il conduit à la connaissance d'un renseignement souvent suffisant sur la position du navire. Au contraire, la détermination immédiate du point par le calcul seul est impossible lorsque l'astre est unique, ce qui arrive fréquemment de jour; avant de commencer les calculs, il faut alors attendre que par l'effet du mouvement diurne la projection de l'astre se soit déplacée suffisamment pour que le nouveau lieu puisse recouper convenablement le premier, qu'il faut du reste corriger du mouvement du navire dans l'intervalle des observations.

219. **Substitution de la droite de hauteur à la courbe.** — Nous avons vu au n° 217 que le rayon de courbure d'une courbe de hauteur est en général très grand; si donc on parvient à déterminer un point de la courbe dans le voisinage de la position du navire, ainsi que la direction de la tangente en ce point, on pourra tracer cette droite et la substituer à la courbe dans une assez grande étendue.

La tangente ainsi obtenue se nomme *droite de hauteur ;* nous montrerons plus loin combien cette substitution est légitime, et nous donnerons le moyen de tenir compte de l'écart lorsqu'il sera nécessaire de le faire.

Le point de la courbe par lequel on mène la tangente se nomme le *point déterminatif* de la droite de hauteur.

220. **Détermination de la droite de hauteur**[1]. — Soit z le point de la sphère géocentrique ayant les mêmes coordonnées (L, G) que le point estimé sur la Terre.

Formons le triangle de position Pza, le point a étant comme au n° 210 la projection de l'astre sur la sphère.

Traçons le cercle de hauteur, dont on connaît le rayon az' (n° 210). Le vertical estimé za (ou son prolongement) coupe normalement le cercle au point z. C'est ce point dont nous prendrons l'image sur la carte comme point déterminatif.

[1] Cette méthode est générale; elle est due à l'amiral Marcq Saint-Hilaire. Il existe deux autres procédés de détermination de la droite de hauteur; comme ils peuvent être parfois en défaut, nous ne les indiquons pas.

Nous supposons le calculateur muni seulement de la C. des T. et d'une table de logarithmes ordinaire. On a proposé diverses méthodes de calcul, basées sur l'emploi de tables spéciales. Celles du commandant Guyou (*Les Problèmes de Navigation et la Carte marine,* Berger-Levrault) doivent être citées en première ligne tant pour leur généralité, qui dispense de l'emploi *de toute autre table dans tous les problèmes de Navigation,* que pour leur simplicité (30 pages au total).

Les tables de M. Souillagouët, professeur d'hydrographie (*Tables du point auxiliaire,* Toulouse, imprimerie Douladoure-Privat), permettent d'abréger notablement le calcul logarithmique des éléments de la droite de hauteur.

Nous signalerons enfin l'abaque de MM. Favé et Rollet de l'Isle (*Ann. hydr. de* 1892).

Soit Z l'image de z sur la carte.

Sauf justification ultérieure, et pour simplifier l'exposition, admettons que de z en z' la variation d'azimut soit insensible. Nous pourrons alors confondre l'élément zz' d'arc de grand cercle avec la loxodromie des points z et z', et l'image de cet élément sur la

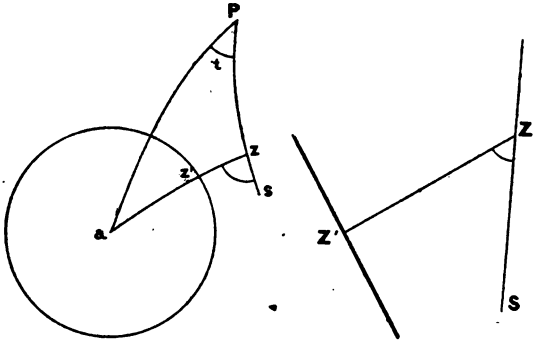


Fig. 40.

carte sera une droite ZZ' faisant au point Z, avec l'image du méridien Pz, un angle SZZ' égal à l'azimut *sza*.

D'ailleurs la différence de longueur entre la loxodromie et l'arc de grand cercle joignant les points z et z' est négligeable (n° 78). Il nous suffira donc de calculer zz' en minutes d'arc, ce qui nous fera connaître ZZ' en milles.

Or, si nous appelons h_v la hauteur vraie conclue de l'observation, nous aurons :

$$az' = 90^\circ - h_v.$$

D'autre part, le triangle P*za* nous permet de cal-

culer az. En effet, si h est le complément de az, on a :

$$(10) \quad \sin h = \sin \mathrm{L} \sin \textcircled{D} + \cos \mathrm{L} \cos \textcircled{D} \cos t,$$

formule dans laquelle on connaît L, latitude estimée; $\textcircled{D}$, déclinaison tirée de la *Connaissance des Temps* au moyen de l'heure de Paris donnée par le chronomètre, et enfin t, angle horaire estimé que l'on déduira de la relation connue

$$t = \mathrm{T}ag = \mathrm{T}sg - \text{Æ}a = \mathrm{T}sp - \mathrm{G} - \text{Æ}a$$
$$= \mathrm{T}mp + \text{Æ}m - \text{Æ}a - \mathrm{G};$$

ou, dans le cas du Soleil :

$$t = \mathrm{T}mp + \mathrm{E}m - \mathrm{G}.$$

Ainsi nous pouvons calculer h. On aura dès lors :

$$(11) \quad zz' = az - az' = 90^\circ - h - 90^\circ + h_v = (h_v - h).$$

Si le point z était à l'intérieur du cercle de hauteur, la différence $(az - az')$ ou $(h_v - h)$ serait négative; il est manifeste qu'alors le point Z', sur la carte, devrait être porté non dans la direction azimutale, mais en sens inverse. Le signe de $(h_v - h)$ suffit donc à préciser le sens dans lequel on doit porter le vecteur ZZ'.

Comme il suffit de connaître zz' à l'approximation de 1′ environ, il ne sera pas nécessaire d'employer plus de 5 décimales aux logarithmes jusqu'aux hauteurs de 80° ; de 80° à 89° il faudrait employer 6 décimales, mais les grandes hauteurs sont rarement observées.

Quant à l'expression des données, en s'arrêtant au

dixième de minute d'arc le plus voisin l'erreur introduite dépasse à peine o',1 dans le cas le plus défavorable.

Il faut connaître aussi, avons-nous dit, l'azimut au point z. La manière la plus simple de calculer cet angle est d'employer la formule de l'analogie des sinus :

$$(12) \qquad \sin Z = \sin t \cos \mathfrak{D} \operatorname{séc} h.$$

Comme ZZ' ne dépasse pas, en général, quelques dizaines de milles, une erreur de quelques dizièmes de degré sur l'angle Z ne déplace pas sensiblement le point Z'; il sera donc suffisant de calculer sin Z avec 4 décimales aux logarithmes.

Pour achever de déterminer Z, on peut conclure, à vue, le signe de son cosinus de l'examen de la formule

$$(12') \qquad \cos L \cos h \cos Z = \sin L \sin h - \sin \mathfrak{D},$$

qui montre que ce signe est le même que celui du second membre; or les logarithmes de chacun des sinus qui y entrent ont été déjà employés pour le calcul de h : en formant la somme $(\log \sin L + \log \sin h)$ à 2 décimales seulement, on voit immédiatement quel est le signe du second membre de (12').

D'ailleurs, si l'on trouve pour log sin Z une valeur nulle à moins de 6 ou 7 unités près du quatrième chiffre décimal, il faut soit restituer le cinquième chiffre aux logarithmes inscrits, soit recourir de préférence à la formule (12') dont on a déjà tous les logarithmes, à l'exception de celui de $\cos h$.

On peut aussi, au lieu d'employer le calcul logarithmique, déterminer Z avec assez de précision par

les Tables de l'amiral Perrin ou par le *nomogramme des azimuts*.

Connaissant désormais le point Z', la droite de hauteur s'obtiendra en élevant une perpendiculaire à la direction Z'Z : on sait en effet que, la carte conservant les angles, la courbe de hauteur coupe normalement l'élément Z'Z de l'image du vertical qui la traverse.

221. **Autres formules.** — Le calcul de Z pouvant s'effectuer, indépendamment, par les logarithmes et par les tables, on a ainsi une vérification facile. Mais pour vérifier le résultat conclu de la formule (10), les formules que l'on peut proposer sont assez longues à calculer, et l'on renonce généralement à cette vérification.

Sans doute l'inconvénient s'atténue lorsqu'on a observé plus de deux lieux géométriques simultanés, car leur intersection mutuelle est une vérification; mais si la droite obtenue est unique et doit être transportée par l'estime pour être combinée ultérieurement avec un autre lieu, il est évidemment très important de s'assurer de l'exactitude du calcul. On peut employer, en ce cas, la méthode suivante; les formules sont moins simples qu'au n° 220, mais par contre 4 décimales aux logarithmes suffisent.

Le triangle de position donne les formules :

$$(13)\quad \begin{cases} \sin h = \sin \mathrm{L} \sin (\mathfrak{L}) + \cos \mathrm{L} \cos (\mathfrak{L}) \cos t, \\ \cos h \cos \mathrm{Z} = -\sin (\mathfrak{L}) \cos \mathrm{L} + \cos (\mathfrak{L}) \sin \mathrm{L} \cos t, \\ \cos h \sin \mathrm{Z} = \cos (\mathfrak{L}) \sin t. \end{cases}$$

Désignons par m un coefficient essentiellement posi-

tif, par ψ un angle auxiliaire compris entre o et 2π, et posons :

$$(14) \quad m \sin \psi = \sin \mathfrak{D}, \qquad m \cos \psi = \cos \mathfrak{D} \cos t.$$

En substituant dans les deux premières formules (13) on a :

$$(15) \quad \sin h = m \cos (L - \psi),$$

$$(16) \quad \cos h \cos Z = m \sin (L - \psi).$$

On détermine ψ sans ambiguïté par les formules (14) en retranchant $\log (m \cos \psi)$ de $\log (m \sin \psi)$, ce qui donne $\log \operatorname{tg} \psi$; le coefficient m étant positif, les signes de $\sin \psi$ et de $\cos \psi$ sont les mêmes, respectivement, que ceux de $\sin \mathfrak{D}$ et de $\cos \mathfrak{D} \cos t$.

On a ensuite m par l'une des formules (14), *en employant la deuxième si la caractéristique de log tg ψ est négative, ou la première s'il n'en est pas ainsi.* De cette manière, il est inutile d'apporter dans la recherche tabulaire de ψ une précision plus grande qu'à l'ordinaire : il suffit de s'arrêter au chiffre des dixièmes de minute d'arc, comme on le fait pour exprimer les données. De plus, l'interpolation dans la recherche du logarithme de $\cos \psi$ (ou de $\sin \psi$) est facilitée par ce fait que les différences tabulaires sont plus petites.

Après avoir formé la différence algébrique $(L - \psi)$, on calcule $\log (\cos h \sin Z)$ par la troisième des formules (13) et $\log (\cos h \cos Z)$ par (16). Par soustraction on en conclut $\log \operatorname{tg} Z$, d'où l'on tire Z sans ambiguïté, les signes de ses sinus et cosinus étant respectivement les mêmes que ceux de $\cos h \sin Z$ et $\cos h \cos Z$.

Connaissant Z, on prend dans la table *log cos* Z *ou log sin* Z *selon que la caractéristique de log tg* Z *est*

négative ou non; en retranchant de la formule (16) ou de la troisième des formules (13) on obtient $\log \cos h$.

D'autre part, la formule (15) donne $\log \sin h$. En combinant avec $\log \cos h$, on en conclut h par sa tangente.

La vérification consiste à comparer les valeurs tabulaires de $\log \sin h$ et de $\log \cos h$ à celles calculées. Si cette vérification réussit, il y a de grandes chances pour que tout le calcul soit exact.

Ce procédé de calcul est applicable dans tous les cas; il suffit d'employer 4 décimales aux logarithmes pour obtenir h à moins de 1′ près, en ayant soin d'observer la règle relative aux caractéristiques.

Z servant au calcul de h, il est bien entendu qu'on doit le tirer de la table avec l'approximation ordinaire, c'est-à-dire en conservant le chiffre des dixièmes de minute.

222. **Tracé de la droite.** — La droite doit être tracée sur une carte marine représentant une sphère et non un ellipsoïde. Le navigateur peut cependant se servir des cartes ordinaires qui, comme on l'a vu, tiennent compte de l'aplatissement; l'écart entre le point estimé et le point exact est en effet généralement assez petit pour qu'il n'y ait pas à se préoccuper de l'erreur ainsi commise (voir nos 36 et 37).

Il n'est même pas nécessaire d'employer une carte; une feuille de papier quadrillé à 4^{mm} ou 5^{mm} suffit. On y trace d'abord deux perpendiculaires figurant le parallèle et le méridien du point estimé Z, puis, à l'aide d'un rapporteur, la direction azimutale issue de ce point. Adoptant ensuite une division du quadrillage

pour représenter le mille à l'échelle des latitudes, on porte un nombre de milles égal au nombre de minutes de $(h_v - h)$ à partir de Z sur la direction azimutale, vers l'astre si $(h_v - h) > 0$, ou en sens inverse si $(h_v - h) < 0$. On obtient ainsi le point déterminatif Z'. Il ne reste plus qu'à mener par Z' une perpendiculaire à Z'Z.

Pour connaître la latitude et la longitude d'un point de la droite ou, plus généralement, du graphique, on mesure l'ordonnée du point à l'échelle adoptée, ce qui donne la différence de latitude, exprimée en minutes, entre le point et l'origine Z; l'abscisse, mesurée à la même échelle, doit être multipliée par le facteur séc L pour faire connaître, en minutes d'arc, la différence de longitude, puisque, d'après les propriétés de la carte marine, l'échelle des latitudes est amplifiée, relativement à celle des longitudes, dans le rapport de séc L à l'unité.

223. **Correction d'azimut.** — Soient, sur la carte, A le point estimé de latitude L, B_1 le point déterminatif approché obtenu en menant la loxodromie $AB_1 = (h_v - h)$ sous l'angle $SAB_1 = Z$, et enfin B le point déterminatif exact situé sur l'image AB du vertical de l'astre.

Nous avons vu au n° 52 que, pour aller d'un point A à un autre point B par le chemin loxodromique, il faut prendre un azimut $SAB = Z'$ différent de l'azimut initial $SAB_1 = Z$ correspondant au chemin par arc de grand cercle, et l'on a, par la formule (19) du n° 53 :

$$Z' = Z - \frac{1}{2} M \operatorname{tg} L_m \sin Z'.$$

L_m est la latitude moyenne entre A et B, et M désigne la longueur en milles de l'arc AB, c'est-à-dire $(h_v - h)$; on a alors, en appelant α l'angle BAB_1 exprimé en minutes comme $(h_v - h)$:

$$\alpha = \frac{1}{2}(h_v - h) \operatorname{tg} L_m \sin Z,$$

$$Z' = Z - \alpha.$$

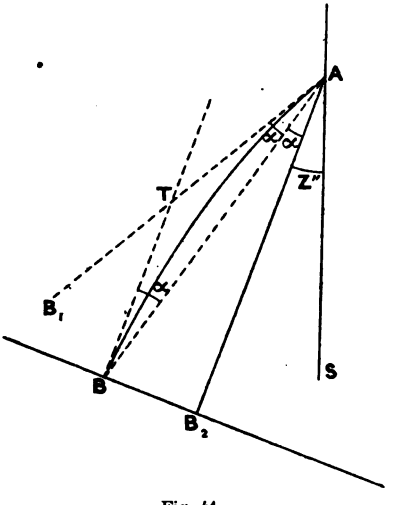


Fig. 41.

La tangente BT à l'extrémité B de l'arc de grand cercle faisant avec BA un angle sensiblement égal à α (n° 52), si nous abaissons du point A une perpendiculaire AB_2 à la droite de hauteur, nous aurons :

$$Z'' = SAB_2 = Z - 2\alpha = Z - (h_v - h) \operatorname{tg} L_m \sin Z'.$$

On a aussi, puisque les longueurs loxodromique et orthodromique entre A et B sont égales (n° 77) :

$$AB_2 = AB \cos \alpha = (h_v - h)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots\right).$$

Pour $(h_v - h) = 100^M$ et $\alpha = 3°$ on a :

$$(h_v - h)\frac{\alpha^2}{2} = 50 \times 9 \times (0{,}017)^2 = 0^M{,}13.$$

On peut donc généralement négliger ce terme et écrire : $AB_2 = (h_v - h)$.

Il résulte de là que, pour tracer correctement la droite de hauteur, il faut porter une longueur

$$AB_2 = (h_v - h)$$

dans l'azimut Z'', ce qui donne le point B_2, et élever par ce point une perpendiculaire sur B_2A.

La figure suppose $(h_v - h) > 0$; on verrait aisément que l'on doit prendre le point B_2 à l'opposé de la direction Z'' lorsque $(h_v - h) < 0$.

L'azimut Z'' se déduit de l'azimut calculé Z en lui appliquant une correction sensiblement égale à

$$-(h_v - h) \operatorname{tg} L \sin Z.$$

En posant $f = -\operatorname{tg} L \sin Z$ on a donc :

(17) $$Z'' = Z + f(h_v - h).$$

La correction $f(h_v - h)$ est exprimée avec la même unité que $(h_v - h)$, c'est-à-dire, dans la pratique, en minutes d'arc.

Nous donnons, à la fin de l'Ouvrage, une petite table des valeurs de f; en l'examinant on voit que, sauf par de hautes latitudes et pour de très grandes valeurs de

$(h_v - h)$, la correction d'azimut est de l'ordre des erreurs à craindre dans le tracé graphique à l'aide d'un rapporteur ordinaire. On pourra donc généralement la négliger ; en tous cas, la table montrera s'il y a lieu d'en tenir compte.

Il est facile de s'assurer que la formule (17) est générale, en ayant égard aux signes de f et de $(h_v - h)$; comme vérification, on remarquera que la correction d'azimut a pour effet de ramener le point B_1 en B_2 *vers l'équateur*.

Cas des grandes hauteurs.

224. Nous avons admis au n° 219 que la substitution de la droite de hauteur à la courbe était permise, de part et d'autre du point déterminatif, dans une région assez grande pour s'étendre jusqu'à la position vraie du navire. Nous allons ici justifier cette hypothèse et donner le moyen de tracer le lieu du navire lorsque, par exception, la droite de hauteur est en défaut.

Remarquons tout d'abord que, dans l'application, on peut toujours substituer à la courbe de hauteur le cercle osculateur correspondant au point déterminatif. En effet, le commandant Guyou a démontré que la distance mesurée normalement d'un point du cercle osculateur à une courbe de hauteur est plus petite que $\frac{m^3}{12}\,\text{arc}^2\,1'$, en représentant par m la distance rectiligne

(en minutes d'équateur) du point de contact au point considéré[1]. Il résulte de là que l'écart entre le cercle et la courbe est plus petit que 0,1 mille tant que m est inférieur à $242\sqrt[3]{\cos^2 L}$ milles, soit 152 milles pour $L = \pm 60°$ et 75 milles pour $L = \pm 80°$. Or il est bien rare que les erreurs de l'estime atteignent ces valeurs. Pour étudier la divergence entre la droite et la courbe, nous substituerons donc à cette dernière son cercle osculateur.

225. **Tracé du cercle osculateur ; méthode de l'amiral Perrin.** — Soient, sur la carte, Z' le point déterminatif et Z un point du cercle osculateur, situé à une distance $ZZ' = m$ du premier.

Appelons ε la distance $ZB = Z'A$ du point Z à la droite de hauteur Z'B. On a :

$$m^2 = \varepsilon \cdot DZ' = 2\rho\varepsilon,$$

en projetant le point Z sur la normale Z'AD.

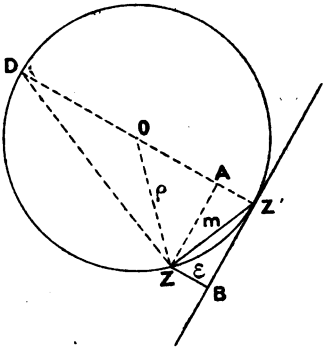


Fig. 42.

On a donc :

$$(18) \qquad \varepsilon = \frac{m^2}{2\rho}.$$

[1] Guyou, **1**, p. 46.

En remplaçant la courbure $\frac{1}{\rho}$ par sa valeur (9), il vient :

$$(19) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m^2 (\operatorname{tg} h \cos L' + \sin L' \cos Z').$$

La formule (9) suppose ρ exprimée en radiants, et (18) exige que m, ρ et ε soient exprimés avec une même unité. Si donc nous voulons transformer ε et m en minutes de l'échelle des latitudes, c'est-à-dire en milles, nous aurons :

$$\varepsilon \operatorname{séc} L' \operatorname{arc} 1' = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{séc}^2 L' \operatorname{arc}^2 1' (\operatorname{tg} h \cos L' + \sin L' \cos Z'),$$

$$(20) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} m^2 \operatorname{arc} 1' (\operatorname{tg} h + \operatorname{tg} L' \cos Z').$$

En calculant par cette formule (20) les valeurs de ε pour diverses valeurs de m variant par exemple de 5 milles en 5 milles, il sera dès lors bien facile de construire la série des points Z correspondants, en se servant de la droite de hauteur déjà tracée. On les joindra ensuite par une ligne continue qui représentera le lieu du navire. D'ailleurs il n'y aura aucune ambiguïté sur le sens dans lequel on devra porter les ε, puisque l'on sait (nos 212, 213, 215) que la concavité est tournée vers l'astre si x est compris entre -90° et $+90^\circ$, ou en sens inverse en dehors de ces limites ; d'après le n° 216 il est fecile de voir que ces conditions reviennent aux suivantes :

Si l'angle horaire t est supérieur à 18 heures ou inférieur à 6 heures, la concavité est tournée vers l'astre ;

Si t est compris entre 6 heures et 18 heures, la con-

cavité est tournée en sens inverse de la direction azimutale.

Pour faciliter l'application de sa méthode, l'amiral Perrin a dressé une table que l'on trouvera à la fin de cet ouvrage (Table IV). Cette table permet d'obtenir à vue les deux quantités

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} m^2 \text{ arc } 1' \text{ tg } h,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} m^2 \text{ arc } 1' \text{ tg L}.$$

En multipliant ε_2 par $\cos Z$, on obtient donc facilement ε.

La table montre que dans la navigation courante ($-60° < L < +60°$) le terme $\varepsilon_2 \cos Z$ est rarement sensible; dans ces conditions et jusqu'aux hauteurs de 80°, il est inutile de se préoccuper de la courbure du lieu géométrique tant que l'erreur de l'estime n'atteint pas 30 milles : l'écart ε est, en effet, inférieur à 1 mille dans ces limites.

226. **Tracé de la courbe sur la carte.** — Quand la distance zénithale vraie n_v est un petit nombre de degrés, on peut tracer directement la courbe entière sur la carte. Il faut supposer, néanmoins, l'observateur assez éloigné des pôles pour que la courbe soit de 1re espèce; celle-ci est alors fermée et ses demi-axes sont liés entre eux par la formule des latitudes croissantes (n° 212). Or, tant que le demi-petit axe OK n'est pas supérieur à 420 minutes d'équateur, on voit par la table des λ que le demi-grand axe OS en diffère de moins de 1 mi-

nute. La courbe se confond sensiblement avec un cercle et on peut la tracer au compas.

A cet effet, on détermine d'abord la longitude G_a de l'astre comme il est dit au n° 210, et l'on trace le méridien correspondant sur la carte.

Sur ce méridien on place le sommet et la base de la courbe en marquant les points qui répondent aux latitudes $(\mathfrak{D} - n_v)$ et $(\mathfrak{D} + n_v)$ (n° 212), puis on trace une circonférence passant par ces deux points et dont le centre soit sur le méridien.

Toutefois, ce procédé très simple n'est guère applicable que jusqu'à 2° ou 3° de distance zénithale, si l'on ne dispose pour tracer le cercle que d'un compas ordinaire. En effet, si l'on veut quelque précision dans le tracé graphique, il est bon de prendre une échelle assez grande, 2 millimètres au moins par mille; le rayon du cercle est alors de 36 centimètres environ dans le cas de $n = 3°$, ce qui est déjà bien incommode. C'est donc avec raison que la Table IV a été étendue jusqu'à 89° de hauteur.

Cas particuliers apportant des simplifications de calcul.

Dans deux cas particuliers que nous allons examiner, on peut calculer la hauteur et l'azimut estimés par des formules plus simples que celles des n^{os} 220 et 221.

227. 1° **Étoile polaire** (α **Petite Ourse**). — Cette étoile brillante, placée près du pôle nord, est fréquem-

ment observée à la mer. On peut profiter de la petitesse de sa distance polaire pour développer la hauteur et l'azimut en séries très convergentes, procédant suivant les puissances de cette quantité.

Dans la formule générale (10) introduisons la distance polaire $\delta = 90^\circ - (L)$. Il vient :

$$(21) \quad \sin h = \sin L \cos \delta + \cos L \sin \delta \cos t,$$

et développons h en fonction de δ par la formule de Mac-Laurin limitée au 3e ordre :

$$(22) \quad h = h_0 + \delta \left(\frac{dh}{d\delta}\right)_0 + \frac{\delta^2}{2}\left(\frac{d^2h}{d\delta^2}\right)_0 + \frac{\delta^3}{6}\left(\frac{d^3h}{d\delta^3}\right)_0.$$

En faisant $\delta = 0$ dans (21) on a $\sin h_0 = \sin L$. Donc $h_0 = L$.

On a ensuite, en différentiant successivement :

$$\cos h \frac{dh}{d\delta} = -\sin L \sin \delta + \cos L \cos \delta \cos t,$$

$$\cos h \frac{d^2h}{d\delta^2} - \sin h \left(\frac{dh}{d\delta}\right)^2 = -\sin L \cos \delta$$

$$- \cos L \sin \delta \cos t = -\sin h,$$

$$\cos h \frac{d^3h}{d\delta^3} - \sin h \frac{d^2h}{d\delta^2} \cdot \frac{dh}{d\delta} - \cos h \left(\frac{dh}{d\delta}\right)^3$$

$$- 2 \sin h \frac{dh}{d\delta} \cdot \frac{d^2h}{d\delta^2} = -\cos h \frac{dh}{d\delta}.$$

Faisant $\delta = 0$ et $h = h_0 = L$ dans ces équations, il vient :

$$\cos L\left(\frac{dh}{d\delta}\right)_0 = \cos L \cos t\,; \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{dh}{d\delta}\right)_0 = \cos t\,;$$

$$\cos L\left(\frac{d^2h}{d\delta^2}\right)_0 - \sin L \cos^2 t = -\sin L\,;$$

d'où

$$\left(\frac{d^2h}{d\delta^2}\right)_0 = \frac{\sin L \cos^2 t - \sin L}{\cos L} = -\operatorname{tg} L \sin^2 t,$$

$$\cos L\left(\frac{d^3h}{d\delta^3}\right)_0 + \sin L \operatorname{tg} L \sin^2 t \cos t - \cos L \cos^3 t$$

$$+ 2 \sin L \cos t \operatorname{tg} L \sin^2 t = -\cos L \cos t\,;$$

d'où $$\left(\frac{d^3h}{d\delta^3}\right)_0 = -\cos t - 3 \operatorname{tg}^2 L \sin^2 t \cos t$$

$$+ \cos^3 t = -3 \operatorname{tg}^2 L \sin^2 t \cos t - \cos t (1 - \cos^2 t)\,;$$

ou $$\left(\frac{d^3h}{d\delta^3}\right)_0 = -\cos t \sin^2 t (3 \operatorname{tg}^2 L + 1).$$

Remplaçant dans (22) les coefficients différentiels par les valeurs ainsi trouvées, et en exprimant h, L, δ en minutes d'arc; on a :

$$(23) \quad h = L + \delta \cos t - \frac{\delta^2}{2} \operatorname{arc} 1' \operatorname{tg} L \sin^2 t$$

$$- \frac{\delta^3}{6} \operatorname{arc}^2 1' \cos t \sin^2 t (3 \operatorname{tg}^2 L + 1).$$

Le terme du 3e ordre peut être négligé pour $L < +70°$. Le maximum de la valeur absolue de $\cos t \sin^2 t$ est en effet $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $\delta = 72'$ environ ; dans ces conditions, le terme en δ^3 est inférieur à o',o5.

La plus grande valeur du terme en δ^2, pour la même limite de L, est 2',07. Il y a donc lieu d'en tenir compte. Mais une erreur de 10' sur δ donne au maximum 0',04 d'erreur sur le terme ; on peut donc adopter pour calculer ce terme une valeur constante $\delta = 72'$, et cela pour un très grand nombre d'années. On a dès lors $\log \cdot \frac{\delta^2}{2} \text{arc } 1' = \bar{1},877$, et la formule (23) devient :

$$(24) \quad h = L + \delta \cos t + [\bar{1},877\, n] \operatorname{tg} L \sin^2 t.$$

Pour calculer $\delta \cos t$ il suffit d'employer 4 décimales aux logarithmes ; le terme suivant peut être calculé à 3 décimales, ou extrait, à vue, d'une table spéciale (table III de cet ouvrage, ou table de la p. 675 de la C. des T. pour 1906, en remarquant qu'ici la correction est toujours négative).

Occupons-nous maintenant de l'azimut. La formule (12) devient, en y introduisant δ :

$$(25) \qquad \sin Z = \sin t \sin \delta \operatorname{séc} h.$$

Cette formule est très simple. Elle donne Z sans ambiguïté, car cet angle est toujours voisin de 180°, et le signe de son sinus le détermine complètement. 3 décimales aux logarithmes suffisent.

Quand on calcule directement Z, il n'y a aucun avantage à transformer la formule (25).

Si l'on développe Z en fonction de δ par la formule de Mac-Laurin, on trouve, l'unité étant le degré :

$$Z = 180° - \delta \operatorname{séc} L \sin t - \frac{\delta^2}{2} \text{arc } 1° \operatorname{tg} L \operatorname{séc} L \sin 2t.$$

Pour $L < +70°$, le terme en $\hat{c}^2$ est inférieur à $0°,10$. On le néglige et l'on a :

$$(26) \qquad Z = 180° - \hat{c} \sec L \sin t.$$

L'une des tables spéciales à la polaire, dans la *Connaissance des Temps*, donne la valeur absolue du terme $\hat{c} \sec L \sin t$ (p. 676 de l'exemplaire de 1906).

228. 2° **Observations circumméridiennes.** — Dans le cas d'une observation faite au voisinage du méridien on peut, si la hauteur n'est pas trop grande, calculer la hauteur estimée par une formule simplifiée.

Pour cet objet spécial nous aurons égard à certaines conventions :

Lors d'un *passage supérieur*, nous substituerons à l'angle horaire t la variable p définie par les relations :

$$\begin{cases} p = -24^h + t, & \text{avant le passage} \\ & \quad \text{(astre à l'est du méridien),} \\ p = t & \text{, après le passage.} \end{cases}$$

Lors d'un *passage inférieur* nous définirons p par la formule

$$p = -12^h + t,$$

et de plus, au lieu de compter la déclinaison à la manière habituelle, nous en prendrons le supplément de valeur absolue, en conservant le signe ; autrement dit, si $\mathfrak{D}'$ est la déclinaison tabulaire, nous prendrons :

$$\mathfrak{D} = \pm 180° - \mathfrak{D}',$$

le signe supérieur convenant à l'hémisphère nord.

Nous désignerons par n la distance zénithale estimée (côté Pz du triangle de position du n° 220) à l'instant

de l'observation, et par n_0 ce que deviendrait cette distance au moment du passage de l'astre au méridien estimé, si L et $\mathfrak{L}$ demeuraient invariables. Quel que soit le passage considéré, nous donnerons aux distances zénithales n et n_0 *le signe* + *ou le signe* — selon que l'observation aura été faite *face au sud* ou *face au nord*.

Avec ces conventions, il est facile de voir que l'on a les formules générales :

$$(27) \qquad n_0 = \mathrm{L} - \mathfrak{L}$$

($p = 0$, formule des passages au méridien),

$$(28) \qquad \cos n = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{L} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{L} \cos p,$$

en dehors du méridien.

L'équation (28) est une relation $n = f(p)$ que nous allons développer suivant les puissances ascendantes de p, supposé très petit, en nous arrêtant au 4e ordre :

$$n = n_0 + p\left(\frac{dn}{dp}\right)_0 + \frac{p^2}{2}\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)_0 + \frac{p^3}{6}\left(\frac{d^3n}{dp^3}\right)_0 + \frac{p^4}{24}\left(\frac{d^4n}{dp^4}\right)_0.$$

En différentiant l'équation (28) on a :

$$-\sin n \frac{dn}{dp} = -\cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{L} \sin p;$$

d'où successivement :

$$-\cos n \left(\frac{dn}{dp}\right)^2 - \sin n \frac{d^2n}{dp^2} = -\cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{L} \cos p,$$

$$\sin n\left(\frac{dn}{dp}\right)^3 - 2\cos n\,\frac{dn}{dp}\,\frac{d^2n}{dp^2} - \cos n\,\frac{dn}{dp}\,\frac{d^2n}{dp^2}$$

$$- \sin n\,\frac{d^3n}{dp^3} = \cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})\sin p,$$

$$\cos n\left(\frac{dn}{dp}\right)^4 + 3\sin n\left(\frac{dn}{dp}\right)^2\frac{d^2n}{dp^2}$$

$$+ 2\sin n\left(\frac{dn}{dp}\right)^2\frac{d^2n}{dp^2} - 2\cos n\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)^2 - 2\cos n\,\frac{dn}{dp}\,\frac{d^3n}{dp^3}$$

$$+ \sin n\left(\frac{dn}{dp}\right)^2\frac{d^2n}{dp^2} - \cos n\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)^2 - \cos n\,\frac{dn}{dp}\,\frac{d^3n}{dp^3}$$

$$- \cos n\,\frac{dn}{dp}\cdot\frac{d^3n}{dp^3} - \sin n\,\frac{d^4n}{dp^4} = \cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})\cos p.$$

Faisant $p = 0$ dans ces équations, on a $n = n_0$ et il vient :

$$\left(\frac{dn}{dp}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)_0 = \frac{\cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})}{\sin n_0}, \quad \left(\frac{d^3n}{dp^3}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{d^4n}{dp^4}\right)_0 = \frac{-3\cos n_0\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)_0^2 - \cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})}{\sin n_0}.$$

En remplaçant dans la série, on a :

$$n = n_0 + \frac{p^2}{2}\,\frac{\cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})}{\sin n_0}$$

$$- \frac{p^4}{24}\left[3\operatorname{cotg} n_0\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)_0^2 + \frac{\cos \mathrm{L}\cos(\mathfrak{L})}{\sin n_0}\right].$$

Exprimons p en minutes de temps et les autres

quantités n, L, $\mathfrak{D}$ en secondes d'arc, et remplaçons n_0 et $\left(\frac{d^2n}{dp^2}\right)_0$ par leurs valeurs. On a :

$$n = \mathrm{L} - \mathfrak{D} + \frac{\mathrm{arc}^2\,1^m}{2\,\mathrm{arc}\,1''}\,\frac{\cos \mathrm{L}\cos\mathfrak{D}}{\sin(\mathrm{L}-\mathfrak{D})}\cdot p^2$$

$$-\frac{\mathrm{arc}^4\,1^m}{24\,\mathrm{arc}\,1''}\,\frac{\cos \mathrm{L}\cos\mathfrak{D}}{\sin(\mathrm{L}-\mathfrak{D})}\left[3\cot g\,(\mathrm{L}-\mathfrak{D})\,\frac{\cos \mathrm{L}\cos\mathfrak{D}}{\sin(\mathrm{L}-\mathfrak{D})} + 1\right]p^4.$$

Posons :

$$(29)\qquad \alpha = \frac{\mathrm{arc}^2\,1^m}{2\,\mathrm{arc}\,1''}\,\frac{\cos \mathrm{L}\cos\mathfrak{D}}{\sin(\mathrm{L}-\mathfrak{D})},$$

et il vient enfin, après réduction :

$$(30)\qquad n = \mathrm{L} - \mathfrak{D} + \alpha p^2$$

$$-\frac{1}{2}\,\alpha\,\mathrm{arc}\,1''\left[\alpha\cot g\,(\mathrm{L}-\mathfrak{D}) + 135\,000\,\mathrm{arc}\,1''\right]p^4.$$

On a construit des tables du coefficient α (T. XIX, Guyou; T. XXX, Friocourt; T. A. Caillet).

On trouve également dans les recueils nautiques une table donnant la limite de p en deçà de laquelle le terme en p^4 est inférieur à $1'$; dans ces conditions, on peut calculer n par la formule

$$(31)\qquad n = \mathrm{L} - \mathfrak{D} + \alpha p^2.$$

Avec les unités précédemment choisies, la correction αp^2 est exprimée en secondes d'arc; la formule n'est pas applicable pour de faibles valeurs de la distance zénithale, car α devient infini pour $\mathrm{L} - \mathfrak{D} = 0$:

on emploie alors la méthode générale, ou le tracé du n° 226.

La formule (29) montre que α a le signe de $(L - \mathfrak{D})$ lorsqu'il s'agit d'un passage supérieur; pour un passage inférieur, $\cos \mathfrak{D}$ est toujours négatif et $\sin (L - \mathfrak{D})$ est de signe contraire à L : α est donc positif ou négatif avec L.

La distance zénithale méridienne estimée $n_0 = L - \mathfrak{D}$ est, *en valeur absolue*, un maximum ou un minimum de la distance zénithale estimée n, selon que le passage est inférieur ou supérieur. Dans l'application de la formule (31), on doit donc être conduit à combiner la *valeur absolue* de αp^2 avec celle de $(L - \mathfrak{D})$ par voie de soustraction dans le 1er cas, ou par voie d'addition dans le second; cette remarque donne une vérification de la règle de signes.

Les tables donnent la valeur absolue de α pour les passages supérieurs; à vrai dire la méthode des circumméridiennes n'est couramment appliquée qu'au Soleil, qui n'est observable à son passage inférieur qu'au delà des cercles polaires. Cependant on peut trouver dans la table la valeur de α pour un passage inférieur : il suffit d'y entrer avec la déclinaison comptée à la manière habituelle, mais changée de signe.

Connaissant n, on a ensuite :

$$h = 90^\circ - |\, n \,|\,,$$

et l'azimut s'obtient par la formule générale

$$\sin Z = \sin t \cos \mathfrak{D} \operatorname{séc} h.$$

Il n'y a aucun avantage à introduire α, p et $(L - \mathfrak{D})$ dans cette formule, comme on le fait quelquefois, car il y a toujours un produit de trois facteurs à calculer.

Détermination d'un parallèle.

Nous ne parlerons pas ici de la détermination directe du parallèle du navire par l'observation d'une hauteur de culmination ou de plusieurs hauteurs circunméridiennes.

L'emploi des chronomètres n'étant pas nécessaire pour cet objet, nous traiterons ces questions au chapitre VII.

CHAPITRE VI

POINT OBSERVÉ

Utilisation des droites de hauteur.

229. Pour obtenir *le point* au moment d'un atterrissage, on peut combiner une droite de hauteur avec le relèvement d'un objet terrestre unique, tel qu'un phare ou un sommet élevé.

Quand le fond se relève aux approches de la côte, on peut aussi obtenir un lieu du navire au moyen de la sonde, en traçant sur la carte la ligne de niveau ainsi déterminée; en recoupant cette ligne par une droite de hauteur, on en conclut la position du navire.

Il importe de remarquer que les deux lieux ainsi utilisés ne peuvent donner le point avec précision s'ils se coupent sous un angle faible, car la moindre erreur de position de l'un d'eux transporterait évidemment très loin le point d'intersection. On devra donc observer l'astre lorsque son gisement azimutal, qni est perpendiculaire à la droite de hauteur, sera aussi peu différent que possible de la direction de l'autre lieu.

On peut encore, dans certains cas, utiliser d'une autre manière les droites de hauteur.

Supposons par exemple qu'avant de voir la terre on se propose de vérifier si la route suivie passe bien par le point choisi pour l'atterrissage. En ce cas on attendra, pour observer, que l'astre soit exactement relevé par le travers, ou, mieux, l'on choisira un astre placé de cette manière, ce que l'on pourra généralement faire au crépuscule : la droite de hauteur sera parallèle à la route, et, portée sur la carte, elle devra passer sensiblement par le point d'arrivée ; en tous cas on saura dans quel sens corriger la route, et l'on pourra tout au moins estimer la grandeur de cette correction.

Si, au contraire, l'astre est observé dans une direction voisine de celle de la route, la droite de hauteur donnera au navigateur une bonne valeur de la distance à laquelle il se trouvait de la terre au moment de l'observation.

230. **Transport par l'estime.** — Pendant le jour, la lune vient quelquefois apporter un lieu géométrique qui peut se combiner avec celui du Soleil ; mais le plus souvent ce dernier astre est seul observable. Il faut alors, pour la détermination du point, faire deux observations espacées de quelques heures, afin que l'azimut du Soleil ait suffisamment varié dans l'intervalle, et transporter par l'estime la première droite obtenue.

A cet effet, soient Z'_1H_1 la droite donnée par la première observation, et $Z'_1Z'_2$ la route, en grandeur et direction, parcourue par le navire dans l'intervalle des observations.

A l'instant de la deuxième observation, le navire se trouvera sur le lieu géométrique obtenu en transportant chacun des points de la droite parallèlement à $Z'_1Z'_2$ d'une longueur égale au nombre de milles parcourus. Si l'échelle de la carte était constante, ce lieu serait une droite parallèle à la première; comme il n'en est pas tout à fait ainsi, les diverses droites, telles que A_1A_2, $Z'_1Z'_2$, ne sont pas égales entre elles. On peut dé-

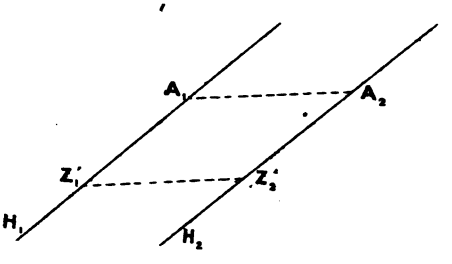


Fig. 43.

montrer que le second lieu approche beaucoup d'être une droite passant par l'un des points transportés, Z'_2 par exemple, et ayant tourné d'un petit angle; mais, eu égard à la petitesse des régions envisagées, cette correction d'orientation serait le plus souvent insensible, et négligeable d'ailleurs devant les erreurs de l'estime. Aussi se contente-t-on de transporter le point déterminatif Z'_1 en Z'_2, et de tracer par ce dernier une parallèle Z'_2H_2 à la droite primitive.

231. **Point à midi.** — En haute mer, on observe habituellement le Soleil une première fois dans la matinée et une deuxième fois vers midi.

Cette pratique est très commode; elle comporte nécessairement une certaine incertitude en longitude, mais elle suffit à la rectification de la route.

En principe on s'efforce de prendre la seconde hauteur à l'instant du passage du Soleil au méridien estimé, à cause de la simplicité des réductions; voyons donc comment on peut déterminer ce moment.

Pour plus de généralité, nous envisagerons le cas d'un astre quelconque. Soient (L, G) les coordonnées du point estimé à une certaine heure M du compteur, avant le passage. Soit M_0 l'heure inconnue du passage de l'astre au méridien estimé du navire.

Connaissant l'état absolu $\mathcal{E}_m$, on a, à l'heure M :

$$T_{mp} = \mathcal{E}_m + M,$$

$$T_{ag} = \mathcal{E}_m + M - G + \text{Æ}_m - \text{Æ}_a.$$

Nous supposons $\mathcal{E}_m$ invariable, c'est-à-dire le compteur parfaitement réglé sur le temps moyen de Paris que nous désignerons d'une manière générale par T. (Cette hypothèse est toujours permise pour le calcul approché que nous avons en vue, à cause de la petitesse de m_m.) Toutes les autres quantités du second membre de T_{ag} sont variables avec T.

Appelons λ et ε les composantes de la vitesse *horaire* du navire suivant le méridien et le parallèle. Si le navire n'avait pas de mouvement en longitude, sa latitude à l'instant du passage serait, à fort peu près, égale à $L + \lambda(24^h - T_{ag})$; par suite, la latitude à l'époque $\frac{M + M_0}{2}$ serait $L_m = L + \frac{\lambda}{2}(24^h - T_{ag})$. Nous adopterons cette valeur de L_m pour calculer la vitesse

horaire moyenne en longitude, γ, par la formule

$$\gamma = \varepsilon \text{ séc } L_m.$$

On obtient λ et ε par la table de point, en y entrant avec la *vitesse en nœuds* et l'angle de route; on donne à ces quantités les signes habituels, c'est-à-dire que l'on prend pour sens positifs des composantes de la vitesse les directions du nord et de l'ouest.

Prenons comme unité la minute de temps, aussi bien pour mesurer les angles que les intervalles; si nous différentions T*ag* par rapport à T, nous avons :

$$\frac{d.\,\mathrm{T}ag}{d\mathrm{T}} = \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{T}} - \frac{d\mathrm{G}}{d\mathrm{T}} + \frac{d(\mathrm{AR}_m - \mathrm{AR}_a)}{d\mathrm{T}}.$$

Le compteur étant réglé sur le temps moyen, on a :

$$\frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{T}} = 1.$$

La vitesse horaire moyenne en longitude, exprimée en minutes de temps, est $\frac{\gamma}{15}$; la vitesse moyenne en longitude par minute de temps moyen est donc :

$$\frac{\gamma}{15 \times 60} = \frac{\gamma}{900}.$$

Par suite, si nous admettons que $\frac{d\mathrm{G}}{d\mathrm{T}}$ est constant et égal à sa valeur moyenne, on aura :

$$\frac{d\mathrm{T}ag}{d\mathrm{T}} = 1 - \frac{\gamma}{900} + \frac{d(\mathrm{AR}_m - \mathrm{AR}_a)}{d\mathrm{T}}.$$

Multiplions par dT et intégrons entre les limites T et T_0; on aura :

$$Tag_0 - Tag = (T_0 - T) - \frac{\gamma}{900}(T_0 - T) + \int_T^{T_0} \frac{d(\mathcal{R}_m - \mathcal{R}_a)}{dT} dT.$$

Or $\frac{d\mathcal{R}_m}{dT}$ est constant, et il en est de même de $\frac{d\mathcal{R}_a}{dT}$, au moins pendant quelques heures, au degré de précision suffisant ici; d'autre part, l'intervalle $(T_0 - T)$ est exactement le même nombre que la différence $(M_0 - M)$ des heures correspondantes du compteur. On a donc :

(1)
$$Tag_0 - Tag = (M_0 - M)\left[1 + \frac{d.(\mathcal{R}_m - \mathcal{R}_a)}{dT} - \frac{\gamma}{900}\right],$$

et si l'on veut que M_0 soit l'heure du passage au méridien estimé, il faudra prendre :

$$Tag_0 = 24 \times 60 = 1440^m,$$

ce qui donne :

(2) $$M_0 - M = \frac{1440^m - Tag}{1 + \frac{d.(\mathcal{R}_m - \mathcal{R}_a)}{dT} - \frac{\gamma}{900}}.$$

Pour le Soleil, on a $\mathcal{R}_m - \mathcal{R}_a = \mathcal{R}_m - \mathcal{R}_v = E_m$. La variation horaire de cette quantité ne dépassant jamais beaucoup 1^s, $\frac{dE_m}{dT}$ est rarement supérieur à

$\frac{1}{60 \times 60} = \frac{1}{3600}$, ce qui est négligeable. On a ainsi :

$$(3) \qquad M_0 - M = \frac{144^m - Tvg}{1 - \frac{\gamma}{900}}.$$

Comme $\frac{\gamma}{900}$ est en général un très petit nombre, on peut mettre la formule (3) sous une forme plus commode dans l'application. On a en effet :

$$\left(1 - \frac{\gamma}{900}\right)^{-1} = 1 + \frac{\gamma}{900} + \frac{\gamma^2}{900^2} + \cdots$$

Ce qui donne :

$$M_0 - M = (144^m - Tvg)\left[1 + \frac{\gamma}{900} + \left(\frac{\gamma}{900}\right)^2 + \cdots\right].$$

Pour $\gamma = 30'$ et $Tvg = 19^h = 114^m$, on a :

$$\left(\frac{\gamma}{900}\right)^2 (144^o - Tvg) = 0^m,33.$$

On peut donc généralement négliger les termes du deuxième ordre et écrire :

(3′)

$$M_0 = M + (144^m - Tvg) + \frac{\gamma}{900}(144^m - Tvg).$$

Revenons maintenant à notre sujet, c'est-à-dire à l'observation du Soleil vers midi.

232. Prenons pour point estimé (L, G) les coordonnées du point déterminatif de la droite du matin, et appliquons la formule (3′), ce qui nous fait connaître

M_0. Calculons pour cet instant la déclinaison $\mathfrak{D}_0$ du Soleil, ainsi que les coordonnées (L_1, G_f) du point déterminatif transporté par l'estime, ce qui donne sur la carte le point Z_1.

En menant Z_1H_1 perpendiculaire à la direction azimutale de l'observation du matin, nous obtiendrons un lieu du navire à l'heure M_0.

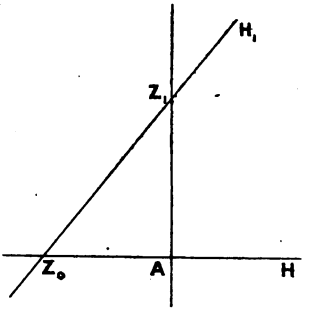


Fig. 44.

Observant ensuite la hauteur du Soleil à l'heure M_0, le calcul de la hauteur et de l'azimnt estimés devient très simple, puisque le point estimé Z_1 se trouve, d'après ce qui précède, dans le méridien de l'astre. On obtient h par la formule des passages

$$n = L_1 - \mathfrak{D}_0$$
$$h = 90^\circ - |n|,$$

et l'azimut est évidemment nul ou égal à 180° selon que l'astre passe au sud ou au nord de Z_1, c'est-à-dire selon que n est positive ou négative.

La droite de hauteur se réduit ainsi à un parallèle; pour en obtenir le point déterminatif on porte, comme dans le cas général, une longueur $Z_1A = |h_v - h|$ dans la direction azimutale ou en sens inverse, selon que $(h_v - h)$ est positive ou négative. Le parallèle AH tracé par le point A est un deuxième lieu du navire à l'heure M_0, et l'intersection Z_0 des droites H_1Z_0 et HZ_0 est le point à cet instant.

On opère ordinairement sur papier quadrillé, comme il est dit au n° 222. Cependant, lorsqu'on se sert réellement de la carte, il est un peu plus court, après avoir porté Z_1H_1, de calculer directement la latitude du point A, au lieu de passer par l'intermédiaire de la hauteur estimée h. Le point de la sphère dont A est l'image sur la carte est en effet dans le méridien de l'astre et sur le cercle de hauteur; on obtient donc sa latitude par la formule des passages méridiens :

$$\begin{cases} n_v = \pm (90^\circ - h_r) \text{ avec les signes } \begin{cases} + \text{face au sud} \\ - \text{face au nord} \end{cases} \\ L_0 = n_v + \Omega_0 \end{cases}$$

Remarques. — Ce qui précède suppose que le procédé de la droite de hauteur est applicable à la deuxième observation, ce qui n'aurait pas lieu si la distance zénithale était très petite; il faudrait alors tenir compte de la courbure, ou mieux, observer à l'instant de la culmination qui, dans ce cas, ne différerait pas sensiblement de celui du passage au méridien vrai : la hauteur maximum donnerait la latitude à l'heure notée à ce moment, et ce dernier serait d'autant plus facile à saisir que le passage s'effectuerait plus près du zénith. Dans ces circonstances, il est d'ailleurs avantageux d'employer la méthode du n° 233.

Si, par suite de l'arrivée intempestive d'un nuage, l'observation ne peut être faite à l'heure M_0, on se sert d'une hauteur prise à une heure voisine M' et l'on calcule les éléments de la droite par la méthode circumméridienne (n° 228); on obtient immédiatement

p par la formule $p = M' - M_0$, très suffisante dans ce court intervalle.

Si le navire changeait de route ou de vitesse dans la matinée, on recommencerait le calcul de M_0 en prenant comme point estimé de départ celui du dernier changement d'allure.

Comme le procédé indiqué pour le calcul de M_0 exige l'emploi d'une vitesse prévue et non mesurée, et que, d'autre part, on se permet une simplification de calcul, il s'ensuit : 1° une petite erreur sur la position du point Z_1 calculée à l'avance, et 2° une légère erreur sur l'angle horaire estimé t_1 qui, calculé exactement pour l'heure M_0 et la longitude G_1 adoptées, ne serait pas tout à fait nul. La première erreur déplace un peu la droite Z_1H_1 ; elle se confond avec l'erreur de l'estime. La deuxième erreur est généralement négligeable, l'heure M_0 étant assez voisine de celle de la culmination pour qu'à cet instant la hauteur observée ne varie pas sensiblement en 1 ou 2 minutes. Le mouvement en hauteur de l'astre renseigne du reste l'observateur à cet égard, au moment voulu.

233. **Hauteurs circumzénithales correspondantes.** — Lorsque le Soleil culmine près du zénith, on peut observer des hauteurs correspondantes à quelques minutes de midi, ce qui permet de déterminer par une réduction très simple la longitude au moment du passage de l'astre. La latitude s'obtient d'ailleurs par la formule des passages, en prenant comme hauteur méridienne la hauteur maximum observée.

Cette méthode est due à l'amiral Perrin ; en l'appliquant lorsque la distance zénithale méridienne

ne dépasse pas 10°, on obtient en moins de 20 minutes tous les éléments nécessaires au calcul du point, qui devient ainsi à peu près indépendant des erreurs de l'estime. On peut cependant étendre le procédé jusqu'aux distances zénithales méridiennes de 20° à 25°, à condition d'augmenter l'intervalle entre les observations.

Pour obtenir la longitude, il suffit de déterminer T*vp* à l'heure du passage au méridien vrai, car à ce moment T*vg* = 0. Or, si l'on connaissait l'heure M_0 du compteur à cet instant, on aurait :

$$Tvp = Tmp + Em = \mathcal{E}_m + M_0 + Em.$$

Toute la question revient donc à déterminer M_0.

A cet effet, l'amiral Perrin démontre (*Revue maritime* d'avril 1884) que si l'on appelle M_m la moyenne des heures de deux hauteurs correspondantes, on a, dans le cas où l'intervalle des observations ne dépasse pas une heure :

$$M_0 = M_m + \frac{48}{\pi} (\Delta L - \Delta \mathfrak{D}) (\operatorname{tg} L - \operatorname{tg} \mathfrak{D}),$$

ΔL désignant le mouvement horaire du navire en latitude et $\Delta \mathfrak{D}$ la variation horaire de la déclinaison, en minutes d'arc.

La correction de M_m est facile à calculer directement[1] ; on peut l'obtenir à vue au moyen d'une table spéciale (T. IV de la 4e édition des Tables de l'amiral Perrin). L'inspection de cette table montre que l'on peut en général se contenter de valeurs approchées de L et de $\mathfrak{D}$ pour le calcul de la correction.

234. **Point par hauteurs simultanées.** — Lorsque deux astres sont simultanément visibles, on

[1] La formule la donne en *secondes de temps*.

peut, en les observant successivement, obtenir deux droites de hauteur dont l'intersection fournit le point. Cette condition de visibilité simultanée se trouve quelquefois réalisée de jour par le soleil et la lune; de nuit, l'observateur n'a que l'embarras du choix entre les étoiles de la première à la troisième grandeur, les planètes brillantes et parfois la lune.

C'est sur les points d'étoiles que l'on devra surtout compter pour les atterrissages, car ils sont indépendants des erreurs de l'estime; en temps de guerre, lorsqu'il faudra s'engager de nuit dans des parages soumis à de forts courants, ces observations, qui se vérifient les unes par les autres, seront précieuses : il convient donc de s'y exercer tout spécialement.

La difficulté des observations de nuit consiste en ce que l'horizon de la mer est souvent peu distinct; cependant, grâce à la lunette Fleuriais (n° 145), il est rare que par un ciel serein on ne puisse prendre des hauteurs utilisables. On peut aussi employer le *gyroscope collimateur* (n° 159).

Lorsque le croissant de la lune est suffisamment développé, entre le premier et le dernier quartier par exemple, l'horizon est presque toujours visible, sauf par temps de brume.

Enfin la difficulté disparaît complètement lors des crépuscules du matin et du soir. Ce sont là les heures d'observation par excellence, pour les atterrissages.

Les observations d'étoiles demandent quelques précautions.

L'observateur devra tout d'abord s'attacher à connaître les principales constellations, afin de pouvoir trouver avec certitude les étoiles dont il aura fait choix

pour l'observation. Il est d'ailleurs bon, lorsqu'une hauteur d'étoile est saisie entre deux nuages, de faire relever immédiatement l'astre au compas : l'azimut et la hauteur permettront de lever toute ambiguïté.

Le choix des étoiles est fait à tête reposée, avant de monter sur le pont pour observer. A l'aide du point estimé on calcule les coordonnées équatoriales du zénith pour l'heure probable de l'observation (déclinaison = latitude, ascension droite = heure sidérale locale), puis on place le zénith et l'horizon sur un navisphère[1]. On peut alors dresser le tableau des coordonnées horizontales des étoiles brillantes (supérieures à la 3e gr.) : les hauteurs serviront à éviter toute méprise pendant l'observation, et les azimuts permettront de faire le choix définitif, qui consiste à trouver trois étoiles d'azimuts tels que les angles aigus des verticaux, considerés deux à deux, soient compris entre 55° et 65° environ. Cette condition remplie, on pointera sur la liste deux ou trois étoiles supplémentaires que l'on observera, mais que l'on ne calculera que si les lieux géométriques fournis par les trois premières ne sont pas suffisamment concourants.

Le calcule s'exécute, pour chaque étoile, par la méthode générale du n° 220. Comme l'observation est assez longue, à cause des difficultés de lecture et de la nécessité de se déplacer parfois afin de dégager le vertical de l'étoile des cheminées, mâts, embarcations, etc., qui pourraient masquer l'horizon, on peut avoir à tenir compte du mouvement du navire dans l'intervalle. Le mieux est d'adopter le même point

[1] Voir n° 92, note.

estimé pour toutes les étoiles; une fois le calcul terminé, on ramène toutes les observations à l'instant de la dernière en opérant de la manière suivante.

Soit Z_n le point estimé, sur le graphique. On mène par ce point une parallèle ZA à la route du navire, et l'on porte sur cette droite divers points Z_1, Z_2, ... tels que les longueurs Z_nZ_1, Z_nZ_2, ... soient égales, à l'échelle des distances, au nombre de milles franchis entre la première et la dernière observation, entre la deuxième et la dernière, etc. Ce sont ces divers points que l'on prend pour origines des vecteurs $(h_v - h)$, (Z) correspondants à chaque observation.

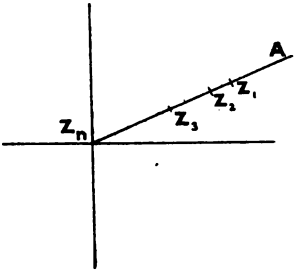


Fig. 45.

Cette manière de faire se justifie immédiatement si l'on remarque que de la i^e observation à la n^e la droite de hauteur est entraînée par le navire, parallèlement à elle-même, de la quantité Z_nZ_i.

Les droites de hauteur ainsi tracées se couperaient en un même point s'il n'y avait pas d'erreurs d'observations. L'incertitude de la position conclue ne dépendrait alors que de l'erreur du chronomètre.

Mais, en fait, il y a toujours un polygone d'intersection de dimensions plus ou moins grandes. Pour calculer la position la plus probable du point, on pourrait écrire les équations des droites de hauteur relativement aux axes adoptés pour faire le graphique. On aurait ainsi, entre les quantités connues, les quantités

mesurées ($h_v - h$) et les inconnues dL et dG, n équations linéaires par rapport à ces dernières, et l'on traiterait l'ensemble par la méthode des moindres carrés. Mais ce calcul serait long, et l'atterrissage serait parfois fait avant qu'on ait pu le terminer; d'ailleurs le graphique lui-même, par un examen judicieux, renseigne le calculateur au sujet de l'approximation sur laquelle il peut compter, et il suffit ordinairement d'adopter comme point probable celui que l'on obtient en cherchant à placer *à vue* un point aussi rapproché que possible de l'ensemble de toutes les droites. Le point le plus probable, obtenu en traitant les équations de condition par la méthode des moindres carrés, est, en effet, celui pour lequel la somme des carrés des distances à chacune des droites est minimum.

Influence des erreurs des données sur le point conclu de deux observations.

235. **Influence des erreurs des données sur le point conclu de deux observations.** — Les éléments qui servent à tracer une droite de hauteur à un moment déterminé sont :

1° les coordonnées de l'astre;

2° la hauteur observée et l'heure chronométrique correspondante;

3° l'état absolu du chronomètre;

4° le transport par l'estime.

Nous examinerons d'abord séparément les influences sur la droite des erreurs commises sur ces divers éléments.

1° *Coordonnées de l'astre.* — L'erreur de l'éphéméride est complètement négligeable à la mer, même pour la lune. D'autre part les chronomètres donnent toujours l'heure de Paris avec assez de précision pour permettre d'obtenir des valeurs correctes de ces coordonnées pour l'instant de l'observation.

2° *Hauteur observée et heure correspondante.* — L'erreur de contact, ou, ce qui revient au même, l'erreur de l'heure notée comme y correspondant, est négligeable, par beau temps, pour un observateur exercé. Par mer creuse, les erreurs accidentelles prennent des valeurs notables; on peut atténuer beaucoup leur influence par l'observation de séries de courte durée : on prend la moyenne des hauteurs que l'on fait correspondre à la moyenne des temps (cinq ou six hauteurs prises rapidement).

Il reste l'incertitude de la dépression, dont il n'est pas facile de s'affranchir.

Une erreur commise sur la hauteur observée a pour effet de faire varier de la même quantité la différence $(h_v - h)$; par suite, le point déterminatif exact, au lieu de se trouver à la position calculée A, peut occuper une position quelconque entre les points A_1 et A_2 pris sur la direction azimutale aux distances $\pm \delta h_v$ du point A, en représentant par δh_v la valeur absolue maximum de l'erreur à craindre.

Le lieu du navire se transforme donc en une *bande d'incertitude* $C_1B_1B_2C_2$ ayant pour axe la droite de hauteur et pour largeur $2\delta h_v$, comptée parallèlement au gisement de l'astre.

3° *Etat absolu du chronomètre.* — Une petite erreur sur l'état du chronomètre n'affecte pas sensiblement,

avons-nous dit, les éléments tirés de la *Connaissance des Temps;* mais elle se reporte en vraie grandeur sur l'élément T*ap* qui est obtenu par la formule

$$Tap = \mathcal{L}_a + A + \text{Æ}m - \text{Æ}a.$$

Si nous désignons par $\partial\mathcal{L}$ la valeur absolue limite de l'erreur à craindre, il suit de ce qui précède que, sur

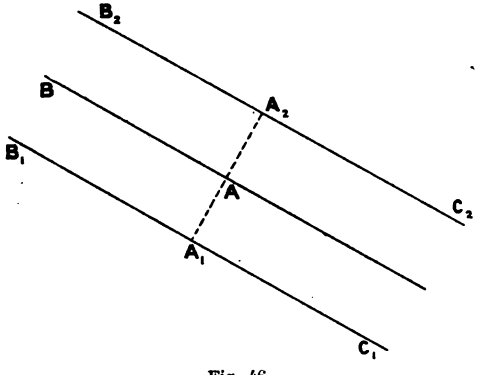


Fig. 46.

la sphère géocentrique, la projection vraie de l'astre demeure sur le petit cercle de déclinaison $\mathfrak{D}_a$, mais le méridien de l'astre peut occuper une position quelconque dans l'angle $\pm\partial\mathcal{L}$ de part et d'autre de la position calculée. Ce déplacement possible du méridien de l'astre a évidemment pour effet de faire tourner du même angle, et parallèlement à l'équateur, chaque point du cercle de hauteur.

Sur la carte, la latitude d'un point quelconque de la droite de hauteur reste constante, mais le point se déplace avec son méridien entre les limites $\pm\partial\mathcal{L}$, en

unités d'équateur. A l'échelle des distances les limites du déplacement sont donc $\pm \cos L\delta\mathcal{E}$ et le navire, au lieu de se trouver sur la droite calculée A'B', peut être en un point quelconque de la bande $B'_2B''_2B''_1B'_1$ dont la largeur, comptée parallèlement à l'équateur, est :

$$A'_1A'_2 = 2 \cos L\delta\mathcal{E}.$$

On voit sur la figure que la largeur de la bande

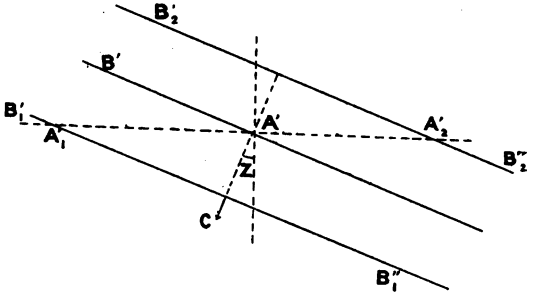


Fig. 47.

d'incertitude, comptée perpendiculairement à la droite de hauteur, est :

$$2A'C = 2A'A'_1 \sin Z.$$

Par suite cette bande a son épaisseur maximum pour une observation faite dans le premier vertical, et elle se réduit à la droite de hauteur elle-même pour une observation méridienne.

4° *Transport par l'estime.* — Soient AB la droite observée et A''B'' sa position estimée à un instant ultérieur.

Si la direction et la vitesse ont été mal estimées, ou

si le navire a subi l'entraînement d'un courant inconnu, il en résulte une certaine erreur sur la position de chacun des points de A″B″.

Soient $\pm \partial R$ les limites de l'écart du point A″ à sa vraie position.

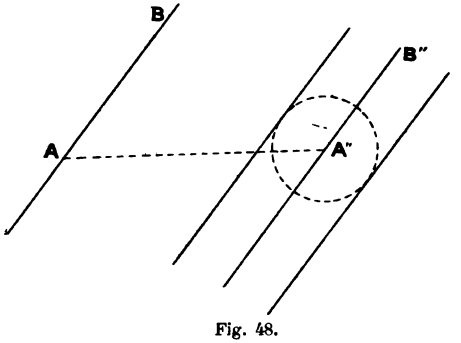


Fig. 48.

En décrivant du point A″ un cercle avec ∂R pour rayon, on aura évidemment les positions limites de la vraie position de la droite de hauteur en menant à ce cercle les tangentes parallèles à A″B″. La bande d'incertitude a donc $2\partial R$ pour largeur comptée parallèlement au gisement de l'astre.

Nous allons maintenant étudier l'influence des diverses erreurs sur le point lui-même, en supposant d'abord $\partial \mathcal{L} = 0$.

236. **Incertitude du point par deux droites non simultanées.** — Soit H_1 la première droite transportée pour l'instant de la deuxième observation. Appelons $\pm \partial h_1$ l'approximation de la première hauteur. La bande d'incertitude sera limitée, comme on l'a vu, par les deux droites H_1'' et H_1', écartées de $2\partial h_1$.

Mais l'estime ayant apporté une erreur $\pm \partial R$, chacune des droites H_1' et H_1'' présentera une incertitude

∂R de chaque côté de la première bande, et la bande d'incertitude totale sera évidemment limitée par les deux parallèles H_1^{III} et H_1^{IV} distantes de

$$2(\partial h_1 + \partial R).$$

Quant à la deuxième droite H_2, la région d'incertitude qu'elle comporte sera simplement la bande $H_2'H_2''$ de largeur égale à $2\partial h_2$, double de l'erreur à craindre sur la deuxième hauteur.

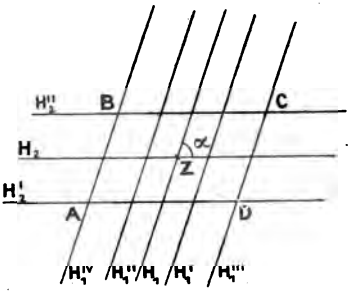


Fig. 49.

On voit ainsi que le point est compris dans le parallélogramme ABCD représentant la région commune aux deux bandes d'incertitude. Le point Z, conclu des observations, est donc erroné au maximum d'une quantité linéaire égale à la demi-longueur de la grande diagonale AC du parallélogramme, et l'on peut se proposer de chercher l'angle d'intersection des droites pour lequel, toutes choses égales d'ailleurs, cette erreur est minimum.

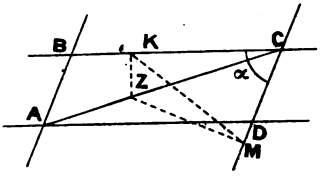


Fig. 50.

A cet effet, appelons α l'angle aigu des deux droites, et abaissons du point Z les droites ZM et ZK respectivement perpendiculaires à CD et à BC.

D'après ce qui a été vu plus haut, on a :

$$ZK = \delta h_2, \qquad ZM = \delta h_1 + \delta R = \delta' h_1.$$

Le quadrilatère ZKCM étant inscriptible, l'angle ZMK est égal à ZCK, et $KZM = \pi - \alpha$. Par suite, on peut écrire :

$$ZC = \frac{ZK}{\sin ZCK} = \frac{ZK}{\sin ZMK} = \frac{KM}{\sin \alpha},$$

et, dans le triangle ZKM :

$$KM^2 = ZK^2 + ZM^2 - 2ZK \cdot ZM \cos KZM;$$

d'où l'on conclut :

$$(4) \qquad ZC = \sqrt{\frac{\delta h_2^2 + \delta' h_1^2 + 2\delta h_2 \delta' h_1 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}}.$$

Ce qui montre que ZC, infini pour $\alpha = 0$, est minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Pour réduire l'incertitude du point, il faut donc faire la deuxième observation de manière à ce que l'écart azimutal avec la première soit aussi voisin que possible de 90°.

Toutefois, il ne faut pas perdre de vue qu'en augmentant l'intervalle des observations on fait croître δR; or cette erreur est en général la plus considérable. Si donc on veut faire un point par deux observations solaires, on a intérêt à observer avant et après midi, afin d'avoir la plus grande variation d'azimut dans le plus court intervalle possible.

237. **Incertitude du point par deux droites simultanées.** — Il suffit de faire $\delta R = 0$ pour se trouver dans le cas précédent. Dans l'équation (4), $\delta' h_1$

se réduit à ∂h_1 et l'on voit par cette équation que des droites peu inclinées conduisent à un résultat très incertain, quelques petites que soient les erreurs d'observation. Au contraire, deux azimuts rectangulaires donnent la meilleure détermination.

238. **Région d'incertitude du point en tenant compte de l'erreur de l'état absolu.** — Nous avons supposé aux nos 236 et 237 que l'erreur de l'état était négligeable.

A la fin d'une longue traversée il peut ne pas en être ainsi, et l'on devra chercher à atterrir en latitude.

En effet, soit ABCD le parallélogramme d'incerti-

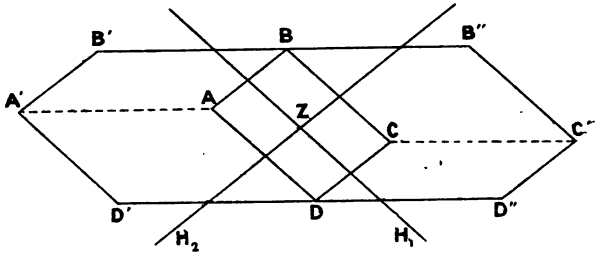


Fig. 51.

tude du point Z donné par les deux droites H_1 et H_2, eu égard aux erreurs de l'estime et des hauteurs seules.

Nous avons vu plus haut que, par l'effet d'une erreur $\pm \partial\mathcal{L}$, la droite de hauteur se transforme en une bande d'incertitude limitée par deux parallèles situées à la distance $\cos L \partial\mathcal{L}$ de part et d'autre de la droite, la distance étant comptée parallèlement à l'équateur.

La première droite H_1 pouvant occuper une position

quelconque entre AD et BC, on voit que sa bande d'incertitude totale s'obtiendra en transportant parallèlement à l'équateur, et à la distance cos L∂ℒ, d'une part B en B″, d'autre part A en A′, et en menant par B″ et A′ des parallèles à H_1.

De même, la bande d'incertitude totale de la droite H_2 s'obtiendra en transportant B en B′ et C en C′ et en menant par B′ et C′ des parallèles à H_2. D'ailleurs on devra prendre $BB' = BB''$, car, en raison de la petitesse des variations des marches, on peut admettre que l'erreur de l'état reste constante d'une observation à l'autre.

Les parties communes à ces deux bandes d'incertitude des droites H_1 et H_2 forment la figure hexagonale A′B′B″C′D″D′ qui constitue la région d'incertitude de Z. On voit donc que l'effet d'une erreur de l'état absolu est de dilater le parallélogramme d'incertitude dans le sens des longitudes, alors que l'incertitude sur la latitude reste la même.

CHAPITRE VII

NAVIGATION SANS CHRONOMÈTRES

Nous allons examiner dans ce chapitre les méthodes auxquelles le navigateur pourrait avoir recours pour rectifier les calculs de l'estime, s'il venait à être privé de ses chronomètres.

239. **Calcul d'heure.** — Le calcul de l'angle horaire d'un astre à un instant déterminé peut s'effectuer par la formule

$$(1) \quad \sin h = \sin \mathrm{L} \sin \mathfrak{D} + \cos \mathrm{L} \cos \mathfrak{D} \cos t,$$

si l'on connaît pour cet instant les valeurs de h, $\mathfrak{D}$, L.

Le sextant permet la mesure de h, et, si l'astre observé est une étoile, $\mathfrak{D}$ s'obtient simplement avec la date du jour. L'observateur dépourvu de chronomètre réglé peut néanmoins se procurer une valeur approchée de l'heure de Paris en ajoutant l'heure moyenne locale, plus ou moins bien connue, à la longitude estimée; cela permet de calculer une valeur relativement exacte de la déclinaison d'un astre mobile : sauf pour la Lune, la précision sera en général suffisante. D'autre part, en prenant soin d'observer l'astre au voisinage du premier

vertical, l'influence de l'erreur de la latitude estimée est presque nulle (n° 181).

On peut donc, à la mer, calculer t par l'observation d'une hauteur.

La longitude estimée permet de transformer ensuite t en temps moyen, sans erreur sensible, et l'on obtient, enfin, l'état, sur le temps moyen local, de la montre employée à l'observation.

On se trouve dès lors en possession d'une bonne valeur de l'heure moyenne locale de l'observation et l'on peut recommencer le calcul, s'il y a lieu, avec une valeur plus exacte de Ω.

On peut calculer t directement par la formule (1) résolue par rapport à $\cos t$, ou employer la formule en $\sin^2 \frac{t}{2}$ donnée au n° 180.

240. **Indications générales sur le calcul du point.** — Si l'observateur ne dispose que d'une montre peu précise, conservant à peine la minute pendant quelques heures, le calcul d'heure peut néanmoins lui être utile pour la détermination de la latitude par l'observation de hauteurs circumméridiennes qu'il traitera par les méthodes que nous ferons connaître.

Dans l'hémisphère nord il pourra encore obtenir la latitude en prenant la hauteur de l'étoile polaire (α Petite Ourse), car si nous appliquons le calcul du n° 227 au triangle de position s'appuyant sur le zénith vrai, on voit que l'on peut écrire ainsi la formule (24) :

$$L = h_v - \delta \cos t - [\bar{1},877\, n] \operatorname{tg} L \sin^2 t,$$

et dans le second membre on connaîtra t par une conversion du temps moyen de l'observation en temps de

l'astre, qu'il suffira d'obtenir à 1 ou 2 minutes près ; on pourra d'ailleurs négliger le terme du 2e ordre qui atteint rarement 1 minute, sauf dans les hautes latitudes, ou le calculer, si l'on y tient, en employant une valeur approchée de L, h_v par exemple.

Enfin l'observation des *culminations*, c'est-à-dire des hauteurs maxima ou minima des astres, peut donner la latitude indépendamment de l'heure ; nous verrons en effet que la hauteur de culmination ne diffère pas sensiblement de la hauteur méridienne, et, du reste, nous donnerons l'expression de la correction à apporter à la hauteur observée pour la réduire au méridien. La longitude estimée permet le calcul de la déclinaison au moment du passage, et la latitude s'obtient par les formules bien connues de l'Astronomie :

$$\begin{cases} n_v = \pm (90^\circ - h_v) \\ L = n_v + \delta \end{cases} \quad \begin{cases} + \text{face au sud.} \\ - \text{face au nord.} \end{cases}$$

Quant à la longitude, elle ne peut guère s'obtenir que par l'observation de la distance angulaire d'un astre à la Lune, ce qui permet la détermination directe du temps moyen de Paris. Encore faut-il que l'astre conjugué (Soleil ou étoile) se trouve, au moment de l'observation de la distance, dans un azimut favorable au calcul d'heure par la hauteur, sans quoi l'incertitude du temps local mal conservé par la montre viendrait s'ajouter à celle du temps de Paris conclu, qui n'est jamais bien précis.

241. Lorsque l'observateur possède une bonne montre à secondes, dont la marche peut être négligée dans un

intervalle de plusieurs heures, l'application des méthodes précédentes s'en trouve naturellement facilitée. Il peut, de plus, si les circonstances atmosphériques ne lui permettent pas d'observer la culmination ou des circumméridiennes d'un astre, déduire néanmoins une bonne valeur de la latitude d'une hauteur prise en dehors du méridien, à condition toutefois que l'azimut soit éloigné des valeurs 90° ou 270°, car les erreurs des données (h, $\mathfrak{D}$, t) produisent sur la latitude calculée des erreurs qui ont toutes $\cos Z$ en dénominateur.

242. **Calcul de latitude par une hauteur extra-méridienne.** — Nous supposerons, comme il vient d'être dit, que l'observateur possède une montre de précision dont il ne connaît pas l'état absolu.

Un calcul d'heure préalable (n° 239), effectué aux circonstances favorables, fait connaître l'état ($Tmg - M$) de la montre sur le temps moyen local. Quelques heures plus tard on aura, pour le méridien actuel G' :

$$(Tmg' - M) = (Tmg - M) + G - G' = (Tmg - M) - g,$$

et cette valeur de l'état sera suffisamment précise si g est bien déterminé, c'est-à-dire si l'intervalle écoulé n'est pas trop grand.

Observant alors la hauteur h d'un astre à l'heure M, on aura L par la formule (1). t sera sera calculé pour l'heure M à l'aide de l'état sur le temps moyen local et d'une conversion de temps ; on tirera $\mathfrak{D}$ de la *Connaissance des Temps* en fonction de l'heure approchée de Paris, et enfin le sextant fournira la hauteur vraie. Les circonstances seront d'autant plus favorables que l'astre sera plus près du méridien.

La latitude entrant dans la formule (1) à la fois par son sinus et par son cosinus, il devient nécessaire d'opérer une transformation. A cet effet on pose :

$$m \cos \psi = \sin \mathfrak{D},$$
$$m \sin \psi = \cos \mathfrak{D} \cos t,$$

m étant un coefficient *positif* par convention et ψ un angle auxiliaire compris entre 0° et 360°. Ces formules donnent ψ sans ambiguïté ; on calculera ensuite m en ayant soin d'employer la valeur tabulaire de $\log \cos \psi$ ou de $\log \sin \psi$ selon que la caractéristique de $\operatorname{tg} \psi$ sera négative ou non.

Cela fait, on aura L par la formule :

$$\sin (L + \psi) = \frac{1}{m} \sin h,$$

qui s'obtient immédiatement par substitution des deux formules précédentes dans (1).

Il y a lieu de remarquer qu'il y a ici une ambiguïté, car on ne sait pas *a priori* si $(L + \psi)$, dont le sinus est positif, doit être pris dans le 1er ou le 2e quadrant. L'estime suffit à décider entre les deux valeurs ; d'ailleurs, si l'on a pris le soin de relever l'astre au compas, on en conclut l'azimut Z, et $\cos (L + \psi)$ est de signe contraire à $\cos Z$, ainsi qu'on le verrait par une transformation facile. Le relèvement au compas suffit, car Z ne saurait être voisin de 90° ou de 270° sans rendre l'observation illusoire (n° 241).

243. **Latitude par des hauteurs circumméridiennes.** — Soient L et G les coordonnées exactes de l'image du navire sur la sphère géocentrique (n° 210), $\mathfrak{D}$ et t les coordonnées horaires d'un astre par rapport

à ce point à l'instant d'une observation de hauteur. Appelant n la distance zénithale vraie observée, on a :

$$(2) \quad \cos n = \sin L \sin \Phi + \cos L \cos \Phi \cos t.$$

Supposons l'observation faite aux environs du passage au méridien, et adoptons les conventions du n° 228 ; la formule (31) de ce numéro nous permet d'écrire l'équation (2) sous la forme :

$$(3) \quad n = L - \Phi + \alpha p^2,$$

pourvu que p' ne dépasse pas la valeur limite pour laquelle le terme en p^4 n'est plus négligeable. Mais il faut bien remarquer qu'il s'agit ici du triangle Pza s'appuyant sur le zénith vrai et non sur le zénith estimé.

Résolvant (3) par rapport à L, on a :

$$(4) \quad L = n - \alpha p^2 + \Phi.$$

L'inspection de la table des valeurs de α montre que ce coefficient varie lentement avec L et Φ, sauf quand l'astre culmine près du zénith ; nous pouvons donc considérer α comme un coefficient numérique constant pendant la durée des observations et qu'il est possible d'obtenir exactement au moyen de valeurs approchées de L et de Φ.

De l'état approché de la montre sur le temps local on peut conclure, à l'aide de la longitude estimée, l'heure de Paris de l'observation avec assez d'exactitude pour obtenir une bonne valeur de Φ. Le cas le plus défavorable serait celui d'une observation lunaire, et une erreur de 4 minutes de temps n'introduirait sur Φ qu'une erreur pouvant à peine atteindre 1'.

Toutes les quantités du 2e membre de la formule (4)

peuvent donc s'obtenir avec une précision suffisante, sauf p.

Ce dernier élément est lié à l'angle horaire vrai t par les formules du n° 228 :

$$(5)\quad \begin{cases} \text{Passage supérieur} \begin{cases} p = -24^h + t, & \text{avant le passage..} \\ p = t & \text{après le passage.} \end{cases} \\ \text{Passage inférieur : } p = -12^h + t. \end{cases}$$

Si par un précédent calcul d'heure effectué aux circonstances favorables on connaissait t, comme il est dit au n° 242, on pourrait en déduire p et calculer L : on serait simplement dans un cas particulier du calcul de latitude par une hauteur extra-méridienne.

Mais si l'état exact de la montre sur le temps du lieu n'est pas connu, on ne peut calculer t avec une précision suffisante ; nous allons voir qu'en faisant deux observations de hauteur convenablement espacées on peut néanmoins obtenir L.

Pour la 1re observation, on aura :

$$(6)\qquad L_1 = n_1 - \alpha p_1^2 + \mathfrak{D}_1,$$

à l'heure M_1 de la montre,

Et pour la seconde :

$$(7)\qquad L_2 = n_2 - \alpha p_2^2 + \mathfrak{D}_2,$$

à l'heure M_2.

On en conclut :

$$L_2 - L_1 = n_2 - n_1 - \alpha (p_2^2 - p_1^2) + \mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1.$$

p_1 et p_2 sont exprimés en minutes de temps et chacun des termes représente des secondes de degré (n° 228). Si donc λ et δ sont les variations de L et de $\mathfrak{D}$, en

secondes d'arc, pour 1 minute de temps moyen, on aura :

$$\lambda(M_2 - M_1) = n_2 - n_1 - \alpha(p_2^2 - p_1^2) + \delta(M_2 - M_1);$$

d'où

$$(8) \quad p_2 + p_1 = \frac{n_2 - n_1 - (\lambda - \delta)(M_2 - M_1)}{\alpha(p_2 - p_1)}.$$

Or, cherchons à exprimer $(p_2 - p_1)$ en fonction de la variation de l'angle horaire t.

Cette variation est $(t_2 - t_1)$, à condition d'ajouter 24^h à t_2 si l'angle horaire a passé par zéro entre les deux observations; en considérant les équations (5), il est alors manifeste que l'on aura :

$$p_2 - p_1 = t_2 - t_1.$$

Reportons-nous maintenant à l'équation (1) du n° 231, qui nous donne la variation de l'angle horaire d'un astre pour un méridien mobile; nous aurons :

$$\mathrm{T}ag_2 - \mathrm{T}ag_1 = t_2 - t_1$$
$$= (M_2 - M_1)\left[1 + \frac{d(Rm - Ra)}{d\mathrm{T}} - \frac{\gamma}{900}\right].$$

On en conclut :

$$(9) \quad p_2 - p_1 = (M_2 - M_1)\left[1 + \frac{d(Rm - Ra)}{d\mathrm{T}} - \frac{\gamma}{900}\right].$$

En substituant cette valeur (9) dans l'équation (8), on en tire $(p_2 + p_1)$; connaissant $(p_2 + p_1)$ et $(p_2 - p_1)$ il est facile d'avoir p_1 et p_2, et par l'une des équations (6) ou (7) on détermine ensuite L_1 ou L_2.

Deux observations dans les limites des circumméri-

diennes permettent donc d'obtenir la latitude à l'un de ces instants.

En faisant un plus grand nombre d'observations, on peut les combiner deux à deux et se ménager ainsi des vérifications.

La formule (8) montre que pour une même erreur sur $(n_2 - n_1)$, l'erreur sur $(p_2 + p_1)$ est inversement proportionnelle à $\alpha(p_2 - p_1)$; il faut donc se garder de donner à $(p_2 - p_1)$, c'est-à-dire à $(M_2 - M_1)$ une trop petite valeur et ne combiner ensemble que des observations faites à plusieurs minutes d'intervalle.

Dans la formule (9) on exprime $(M_2 - M_1)$ en minutes et dixièmes, et l'on calcule le crochet avec deux chiffres décimaux. Cette approximation est généralement suffisante. Prenons en effet un cas un peu extrême, celui d'un navigateur faisant route le long du parallèle $+60^\circ$ avec une vitesse de 20 nœuds et observant le Soleil par une déclinaison de -3°. On a $\alpha = +1'',1$ et les limites de p sont $\pm 60^m$ environ.

En faisant deux observations à l'écart maximum, on a $p_2 - p_1 = 120^m$, et si le crochet de (9) est erroné de $\frac{1}{2}$ centième, soit 0,005, l'erreur de $(p_2 - p_1)$ est $0^m,6$. L'erreur sur p_2 conclu de (8) et de (9) est $\frac{0,6}{2} = 0^m,3$, ce qui donne 40″ environ d'erreur sur L_2. On aurait d'ailleurs $\gamma = 20 \text{ séc } 60^\circ = 40'$, et $\frac{\gamma}{900} = \frac{4}{90}$, soit plus de 0,04; ce terme ne serait donc pas négligeable en ce cas. Nous avons montré que, *pour le Soleil*, $\frac{d(Rm - Ra)}{dT}$ ne dépassait généralement

pas $\frac{1}{3600}$ (n° 231) ; on peut donc négliger cette quantité et prendre :

$$p_2 - p_1 = (M_2 - M_1)\left(1 - \frac{\gamma}{900}\right).$$

Mais, *pour la Lune*, le mouvement en Æ est en moyenne de 2 secondes par minute, ce qui donne :

$$\frac{d(Æm - Æ\,\mathbb{C})}{dT} = \frac{0{,}17 - 2{,}0}{60} = -0{,}03.$$

Dans l'exemple que nous envisageons, si l'on substituait la Lune au Soleil en supposant la route dirigée vers l'ouest, on aurait 0.07 d'erreur sur le crochet en le prenant égal à 1,00 et l'on commettrait ainsi sur L_2 une erreur de 9′ environ.

Remarque. — Si le navire changeait de route dans l'intervalle de deux observations circumméridiennes, on pourrait évidemment supposer qu'il s'est déplacé d'un mouvement uniforme pour aller directement de la 1re position à la 2e ; il conviendrait donc de remplacer dans les formules $\lambda(M_2 - M_1)$ et $\frac{\gamma}{900}(M_2 - M_1)$ par l et $\frac{g}{900}$, l et g étant les différences de coordonnées entre la 1re et la 2e observation.

244. **Méthode de réduction du commandant Guyou.** — Cette méthode de réduction est très simple et peut s'appliquer à un nombre quelconque d'observations circumméridiennes.

Supposons qu'à l'aide de l'état approché de la montre sur le temps moyen local on ait calculé l'angle horaire

de l'astre, avant le passage au méridien, pour une certaine heure M de cette montre.

On peut en conclure, par les formules du n° 231, l'heure M_0 approchée du passage de l'astre au méridien.

Faisant ensuite $M_1 = M_0$ et $p_1 = 0$ dans la formule (9), on aura, à l'heure M_i d'une observation :

$$10) \quad p_i = (M_i - M_0)\left[1 + \frac{d(Rm - Ra)}{dT} - \frac{\gamma}{900}\right],$$

ce qui permet de calculer les divers p_i correspondants aux observations faites.

Mais ces p_i n'étant qu'approchés, on commettra une erreur en calculant par la formule (4) L pour l'instant de l'une des observations.

Soit donc p la valeur exacte, inconnue, et p' la valeur approchée, calculée par la formule (10). Posons :

$$p = p' + \Delta p',$$

et substituons dans (4). Il vient :

$$L = n - \alpha p'^2 - 2\alpha p' \Delta p' - \alpha \Delta p'^2 + (5);$$

d'où, en transposant :

$$(11) \quad n - \alpha p'^2 = L + 2\alpha p' \Delta p' + \alpha \Delta p'^2 - (5).$$

L'erreur de l'angle horaire qui a servi de base au calcul de M_0 se reporte sur cette quantité avec un facteur inverse de celui du crochet de (10) : elle produit donc sur p' calculé par la formule (10) une erreur égale. Ainsi $\Delta p'$ est constant pour toutes les observations, sauf erreur de marche de la montre ; il sera très petit si l'angle horaire de base a été conclu d'un calcul d'heure fait aux circonstances favorables.

La latitude L varie proportionnellement au temps si le mouvement du navire est uniforme, ce que nous supposerons pour ne pas enlever à la méthode son caractère de simplicité; il en est de même de p', d'après (10). Enfin il en est toujours ainsi de Ω pendant la courte durée des observations. On voit donc que le second membre de (11) varie proportionnellement au temps, et, par suite, il en est de même du premier membre $(n - \alpha p'^2)$.

Considérons maintenant la série des hauteurs observées, telles qu'elles ont été lues sur le sextant :

$$H_1, \quad H_2, \quad \ldots \quad H_m,$$

et les hauteurs vraies que l'on en déduit :

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots \quad h_m.$$

Comme les hauteurs varient peu dans le voisinage du méridien, on peut admettre que la correction globale à apporter à l'une quelconque des hauteurs, H_t, pour obtenir la hauteur vraie correspondante, h_t, est constante.

Or nous avons vu au n° 228 que, pour les passages supérieurs, α était de même signe que les distances zénithales, tandis que pour les passages inférieurs ce coefficient était de signe contraire à celui de ces quantités. Il s'ensuit que la valeur absolue du terme $\alpha p'^2$ de la formule (11) doit être retranché de la valeur absolue de n dans le 1er cas, ajoutée dans le second :

$$| n - \alpha p'^2 | = | n | \mp | \alpha p'^2 | \ ;$$

d'où

$$90^\circ - | n - \alpha p'^2 | = 90^\circ - | n | \pm | \alpha p'^2 |$$
$$= h \pm | \alpha p'^2 | .$$

Le 1er membre de cette dernière formule variant proportionnellement au temps d'après ce qui précède, il en est de même du second, ou, ce qui revient au même, de

$$H \pm | \alpha p'^2 | ,$$

qui n'en diffère que par une constante.

Posons :

$$(12) \qquad y = H \pm | \alpha p'^2 | - \mathcal{H},$$

$\mathcal{H}$ étant une constante arbitraire que l'on choisira voisine de la hauteur moyenne de la série, afin de ne pas avoir à opérer sur de trop grands nombres.

y variant proportionnellement au temps ainsi que p' calculé par la formule (10), on peut écrire :

$$y = kp' + y_0,$$

équation d'une droite que l'on peut construire graphiquement.

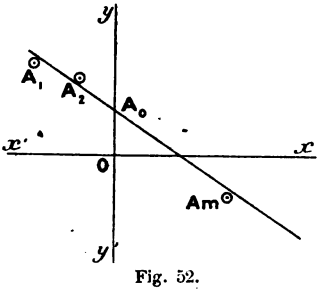


Fig. 52.

A cet effet, on calculera par la formule (10) les diverses valeurs

$$p'_1, \quad p'_2, \quad \dots \quad p'_m,$$

correspondantes aux heures d'observation

$$M_1, \quad M_2, \quad \dots \quad M'_m.$$

On formera les produits

$$| \alpha p'^2_1 | , | \alpha p'^2_2 | , \dots | \alpha p'^2_m | ,$$

puis, par la formule (12), on calculera les ordonnées

$$y_1, \quad y_2, \quad \dots \quad y_m,$$

et, traçant deux axes rectangulaires Ox, Oy, on portera les divers points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots \quad A_m$$

par leurs coordonnées y_i et $x_i = p'_i$, en prenant des échelles convenables pour représenter la minute de degré et la minute de temps. Ces points seront alignés, aux erreurs d'observation près.

Faisant passer ensuite une droite le mieux possible par l'ensemble des points A_i, on relèvera l'ordonnée y^0 du point A_0 pour lequel $p'_0 = 0$. On aura alors, par la formule (12) : $y_0 = H_0 - \mathcal{H}$,

ce qui fera connaître H_0, hauteur instrumentale qui aurait été observée à l'heure M_0.

Corrigeant H_0 des constantes instrumentales, de la dépression, etc., on obtiendra la hauteur vraie h_0 dont le complément, affecté du signe convenable (+ face au sud), sera la distance zénithale vraie n_0 pour l'heure M_0, conclue de l'ensemble des observations.

En introduisant n_0 dans la formule (11), on aura, puisque $p'_0 = 0$:

$$n_0 = L_0 + \alpha \Delta p'^2 - (\Omega)_0,$$

L_0 et $(\Omega)_0$ se rapportant à l'heure M_0. On obtiendra ainsi : $L_0 = n_0 + (\Omega)_0$

au terme $\alpha \Delta p'^2$ près, ce qui est généralement négligeable.

Remarque. — Pour que la droite soit bien déterminée, il est nécessaire que les points extrêmes A_1 et A soient suffisamment écartés ; la durée totale de la série doit être de 20 minutes au moins.

245. **Culminations.** — Nous supposerons dans ce qui suit que l'on a calculé la déclinaison $\mathfrak{D}_0$ de l'astre à l'instant du passage; la longitude estimée sera en général suffisante pour cet objet : même dans le cas de la Lune, 1 degré d'erreur en longitude ne produit pas une différence de plus de 1′ dans la déclinaison.

Reprenons la formule (4) :

$$(4) \qquad L = n - \alpha p^2 + \mathfrak{D},$$

dans laquelle L, $\mathfrak{D}$, p conviennent à l'instant de l'observation de la distance zénithale vraie n, au voisinage du méridien.

Nous avons vu que α pouvait être considéré comme un coefficient constant pendant la durée d'une série d'observations circumméridiennes; en différentiant (4) par rapport au temps moyen de Paris T, on aura donc :

$$(13) \qquad \frac{dL}{dT} = \frac{dn}{dT} - 2\alpha p \frac{dp}{dT} + \frac{d\mathfrak{D}}{dT}.$$

D'autre part, en faisant dans la formule (9) $M_1 = M_0$, heure du passage, on a $p_1 = 0$, et il vient pour l'expression de p à l'heure quelconque M, en supprimant l'indice 2 :

$$p = (M - M_0)\left[1 + \frac{d(\text{Æ}_m - \text{Æ}_a)}{dT} - \frac{\gamma}{900}\right].$$

La montre étant réglée sur le temps moyen, on a :

$$\frac{dM}{dT} = 1.$$

Par suite :

$$\frac{dp}{dT} = 1 + \frac{d\,.\,(\text{Æ}m - \text{Æ}a)}{dT} - \frac{\gamma}{900}.$$

Appelons λ et δ les variations respectives, en secondes d'arc, de L et de Ω dans l'unité de temps, qui est ici la minute. En supposant ces mouvements uniformes, l'équation (13) devient :

$$\lambda = \frac{dn}{d\mathrm{T}} - 2xp\left[1 + \frac{d.(\mathrm{A}m - \mathrm{A}a)}{d\mathrm{T}} - \frac{\gamma}{900}\right] + \delta.$$

La culmination étant un maximum ou un minimum de n, on a à cet instant $\frac{dn}{d\mathrm{T}} = 0$; si p_c désigne la valeur correspondante de p, l'équation précédente donne :

$$p_c = -\frac{\lambda - \delta}{2\alpha\left[1 + \frac{d.(\mathrm{A}m - \mathrm{A}a)}{d\mathrm{T}} - \frac{\gamma}{900}\right]}.$$

Pour le Soleil, $\frac{d.\mathrm{A}m - \mathrm{A}a)}{d\mathrm{T}}$ est négligeable.

Pour la Lune, la valeur moyenne de ce terme est $-0{,}03$ (n° 243); en supposant d'autre part $\gamma = +40'$, on aurait $\frac{\gamma}{900} = +0{,}04$ environ, le crochet serait égal à $(1 - 0{,}07)$ et il viendrait :

$$p_c = -\frac{\lambda - \delta}{2\alpha}(1 + 0{,}07 + 0{,}0049\ldots).$$

On aura donc toujours, à moins de 0,1 près de la valeur calculée :

$$p_c = -\frac{\lambda - \delta}{2\alpha}. \qquad (14)$$

Remplaçant dans la formule (4) p par cette valeur, on a, pour l'instant de la culmination :

$$(15) \qquad L_c = n_c + \mathfrak{D}_c - \frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha},$$

la déclinaison $\mathfrak{D}_c$ étant calculée pour l'instant de la culmination.

p_c étant toujours petit, $\mathfrak{D}_c$ ne diffère pas sensiblement de la déclinaison $\mathfrak{D}_0$ pour le passage au méridien, lorsqu'il s'agit du Soleil : la variation de cette coordonnée, en effet, atteint au plus 1′ par heure.

En considérant n_c comme une distance zénithale méridienne, la latitude serait :

$$L' = n_c + \mathfrak{D}_c,$$

et cette valeur serait en erreur de $-\frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha}$. On peut s'assurer que, dans le cas des astres autres que la Lune, ce terme est ordinairement négligeable; par suite, à la mer, il est licite de considérer L′ comme la latitude à l'instant de la culmination. On arrive à la même conclusion en ce qui concerne la Lune, si l'on prend soin de substituer $\mathfrak{D}_0$ à $\mathfrak{D}_c$, ce qui est du reste plus commode. On a en effet, à très peu près :

$$\mathfrak{D}_c = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{d} p_c.$$

Ce qui donne, après substitution dans (15) et réduction :

$$L_c = n_c + \mathfrak{D}_0 - \frac{(\lambda - \delta)(\lambda + \delta)}{4\alpha}.$$

Pour passer de $L'' = (n_c + \mathfrak{D}_0)$ à L_c la correction est donc, en valeur absolue, inférieure au quotient

par α du quart du carré de la plus grande des deux quantités λ ou δ; elle est ordinairement négligeable.

Pour éclaircir ce qui précède, prenons un exemple numérique, et plaçons-nous dans un cas défavorable.

Considérons un navire situé par $L = -60°$, $G = 0$, et faisant route au nord à la vitesse de 20 nœuds le 19 août 1906. On observe la culmination du soleil et l'on se propose de calculer la correction à apporter à la latitude obtenue en traitant la hauteur observée comme méridienne.

Pour $Tvp = 0^h$ le 19 août 1906, la *Connaissance des Temps* donne :

$$\Omega\odot = +13°,0, \quad \delta = -\frac{48,65}{60} = -0'',8.$$

On a, d'autre part, $\lambda = +20'',0$.

C^{te}	. . . . .	0,293
$L = -60°$.	. . .	cos $\bar{1}$,699
$\Omega = +13$	. . . .	cos $\bar{1}$,989
$L - \Omega = -73$	. . .	coséc 0,019 n
	α	0,000 n
	$\alpha = -1'',0$	

$$\lambda - \delta = +20'',8$$

$$p_c = -\frac{20,8}{-2} = +10^m,4$$

$$(\lambda - \delta)^2 = 432,6$$

$$-\frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha} = -\frac{432,6}{-4} = +108'' = +1',8.$$

La culmination se produit donc $10^m,4$ après le passage, et la correction cherchée est $+1',8$.

Appliquons le même calcul à la Lune, supposée observée au même point du ciel, mais prenons $\delta = -16''$, ce qui peut se présenter. On a alors :

$$\alpha = -1'',0 \qquad \lambda - \delta = +36'',0$$

$$p_c = -\frac{36,0}{-2} = +18^m,0$$

$$(\lambda - \delta)^2 = 1296,0$$

$$-\frac{(\lambda-\delta)^2}{4\alpha} = -\frac{1296}{-4} = +324'' = +5',4.$$

La culmination lunaire se produirait 18 minutes environ après le passage ; on aurait $\Omega_c = \Omega_0 - 4',8$ à très peu près, et la correction de L′ s'élèverait à $+5',4$. On voit ainsi que $L'' = (n_c + \Omega_0)$ ne serait en erreur que de $+5',4 - 4',8 = +0',6$, abstraction faite de l'erreur de Ω_0 provenant de l'incertitude de la longitude estimée. On retrouve ainsi la valeur du terme correctif de L″ :

$$-\frac{(\lambda-\delta)(\lambda+\delta)}{4\alpha} = -\frac{36 \times 4}{-4} = +36'' = +0',6.$$

246. **Latitude à l'instant du passage.** — Sauf pour les passages à de grandes hauteurs, il est assez difficile de saisir l'instant M_c de la culmination puisque, eu égard au faible grossissement de la lunette du sextant, l'astre semble rester stationnaire pendant quelques minutes. Au contraire, l'heure M_0 du passage peut être obtenue assez exactement, à moins d'erreurs exceptionnelles de l'estime, si l'on a fait un calcul d'heure pour régler la montre ; il est donc préférable de calculer M_c en apportant à M_0 la correction p_c donnée par la formule (14).

D'autre part, on calcule $\mathfrak{D}_0$ pour le passage au méridien estimé en interpolant pour G la déclinaison tabulaire prise pour la date; il faut donc encore corriger $\mathfrak{D}_0$ de δp_c pour obtenir $\mathfrak{D}_c$, à moins que l'on ne néglige cette correction. Enfin il faut calculer le terme $\frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha}$ de la formule (15) pour obtenir L_c correspondante à l'heure M_c.

Au lieu de tous ces petits calculs il est plus simple, si l'on veut tenir compte de l'erreur de culmination, de chercher directement la latitude L_0 à l'heure M_0, c'est-à-dire à midi lorsqu'il s'agit du soleil.

On a en effet, sensiblement :

$$L_c = L_0 + \lambda p_c,$$
$$\mathfrak{D}_c = \mathfrak{D}_0 + \delta p_c,$$

d'où, par la formule (15) :

$$L_0 + \lambda p_c = n_c + \mathfrak{D}_0 + \delta p_c - \frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha}.$$

En remplaçant p_c par sa valeur (14) et en réduisant on a facilement :

$$L_0 = n_c + \mathfrak{D}_0 + \frac{(\lambda - \delta)^2}{4\alpha}.$$

247. **Distances lunaires.** — La méthode des distances lunaires était autrefois très employée pour la détermination de la longitude en mer. Le principe en est le suivant.

L'observateur mesure au sextant ou au cercle la distance angulaire apparente d'un astre à l'un des bords de la Lune et, appliquant à l'angle observé les corrections nécessaires, il en déduit par le calcul la valeur

de la distance vraie des centres, telle qu'elle serait vue du centre de la terre s'il n'y avait pas d'atmosphère. Cette distance est incessamment variable, par suite du grand mouvement propre de la Lune sur la sphère céleste; les coordonnées des astres étant données par la *Connaissance des Temps* en fonction du temps moyen de Paris, on conçoit que l'on puisse déduire de la distance vraie mesurée l'heure du premier méridien correspondante à l'instant de l'observation.

D'autre part, nous avons montré dans ce qui précède que le navigateur pouvait, par l'observation des hauteurs, régler sa montre sur le temps moyen local; il pourra donc, en comparant les indications de celle-ci à l'heure de Paris conclue de la distance observée, obtenir la longitude du lieu d'observation.

Mais la méthode est peu précise; une erreur dans la mesure de la distance se reporte sur l'heure de Paris déduite avec un facteur qui s'élève en moyenne à 27 pour une distance lunistellaire, à 30 pour une distance lunisolaire.

Le degré de perfection auquel les chronomètres sont parvenus aujourd'hui ne permet plus de considérer comme moyen de contrôle efficace une méthode astronomique dont les résultats sont moins précis que ceux qu'il s'agit de vérifier, même à la fin d'une longue traversée, en supposant toutefois que le navigateur ait à sa disposition deux chronomètres et un compteur, au moins.

Nous allons donner des indications sommaires, mais suffisantes pour permettre la réduction d'une distance observée à sa valeur géocentrique. Pour le calcul de l'heure de Paris correspondante à la distance vraie, on

trouvera dans l'article *Explication et usage des éphémérides* de la *Connaissance des Temps* tous les renseignements nécessaires.

Préparation de l'observation. — On peut se proposer d'observer la distance de la Lune soit au Soleil, soit à tout autre astre. Dans ce dernier cas il est indispensable de faire un choix. Il est évident en effet que, toutes choses égales d'ailleurs, l'heure de Paris conclue de l'observation sera d'autant plus exacte que la distance variera plus vite avec le temps; or, comme cette distance varie surtout par l'effet du mouvement propre de la Lune, il importe de choisir un astre qui soit aussi voisin que possible de la trajectoire de notre satellite sur la sphère céleste. On devra donc s'adresser exclusivement aux étoiles de la zone zodiacale, ou aux planètes.

Pour la facilité et, par suite, la précision de l'observation, il est avantageux de prendre des petites distances, de 15° à 60° par exemple. En portant la position de la Lune sur le globe du navisphère pour une certaine heure du jour de l'observation et pour la même heure du lendemain, il est facile de voir quels sont les astres qui se présentent dans le voisinage du plan de l'orbite, aux distances comprises dans des limites acceptables. Faute de ce moyen, on pourra choisir dans le ciel même une étoile ou une planète paraissant peu éloignée de l'arc perpendiculaire à la ligne des cornes du croissant lunaire.

Réduction de la distance apparente des centres. — Soit O le centre de la sphère céleste de l'observateur, et soit C le centre de la terre; prolongeons le rayon CO de cette dernière jusqu'à son intersection Z_1 avec la

sphère céleste. Ce point se nomme le *zénith des parallaxes;* il est, comme on le sait, différent du zénith vrai, à cause de l'aplatissement terrestre.

Soient, dans l'espace, L le centre de la Lune et S celui d'un autre astre, Soleil, étoile ou planète.

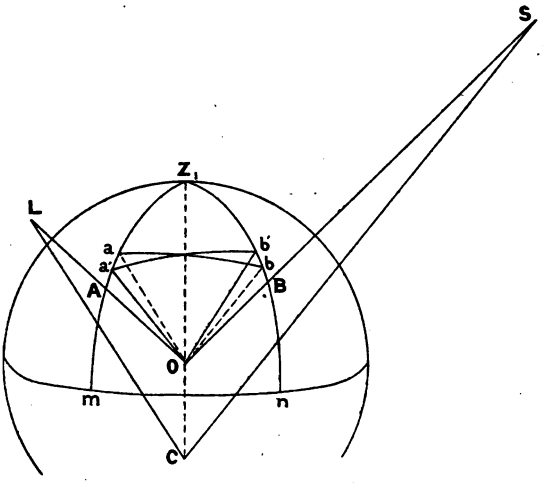


Fig. 53.

Les plans Z_1CL et Z_1CS rencontrent la sphère suivant deux grands cercles Z_1Am et Z_1Bn et, s'il n'y avait pas d'atmosphère, l'observateur verrait les astres se projeter aux points A et B situés à l'intersection de ces cercles avec les rayons OL et OS de la sphère.

Menons les parallèles Oa et Ob aux droites OL et OS. Les points a et b sont placés, parmi les étoiles de la sphère céleste de l'observateur, de la même manière

que les projections des points L et S sur la sphère céleste géocentrique.

La distance vraie géocentrique est donc égale à l'arc de grand cercle ab. Nous la désignerons par Δ.

La réfraction relève les points A et B dans leurs verticaux; en raison d'une part de la petitesse des réfractions devant les distances zénithales, d'autre part du peu de distance qui sépare le zénith vrai de Z_1, on peut admettre que les déplacements apparents Aa' Bb' ont lieu dans les grands cercles mZ_1 et nZ_1.

L'observateur mesure la distance apparente $\Delta' = a'b'$. Nous montrerons plus loin comment il peut se procurer les hauteurs

$$a'm = H'\mathbb{C}, \qquad am = H\mathbb{C},$$
$$b'n = H'\odot, \qquad bn = H\odot,$$

complémentaires des distances au zénith des parallaxes. Dès lors le triangle $a'Z_1b'$ permet de déterminer l'angle Z_1 par la relation :

(16)
$$\cos\Delta' = \sin H'\mathbb{C} \sin H'\odot + \cos H'\mathbb{C} \cos H'\odot \cos Z_1,$$

et le triangle aZ_1b donne ensuite :

(17)
$$\cos\Delta = \sin H\mathbb{C} \sin H\odot + \cos H\mathbb{C} \cos H\odot \cos Z_1.$$

Si Z_1 est assez grand, on peut calculer cet angle et Δ directement, en employant 7 décimales aux logarithmes. S'il n'en est pas ainsi, il devient nécessaire de transformer ces formules; on peut employer le système suivant (formules de Borda) :

$$(18)\quad \begin{cases} 2S = H'\mathbb{C} + H'\odot + \Delta' \\ \sin^2\psi = \dfrac{\cos H\mathbb{C}\cos H\odot}{\cos^2\dfrac{H\mathbb{C}+H\odot}{2}} \cdot \dfrac{\cos S\cos(S-\Delta')}{\cos H'\mathbb{C}\cos H'\odot} \\ \sin\dfrac{\Delta}{2} = \cos\dfrac{H\mathbb{C}+H\odot}{2}\cos\psi. \end{cases}$$

Calcul des hauteurs vraies et réfractées. — On démontre[1] que si l'on désigne par δ' la correction à apporter à Δ' pour avoir Δ, on a :

$$(19)\quad \delta' = -aa'\cos Z_1a'b' + bb'\cos Z_1b'a',$$

en considérant aa' et bb' comme des quantités très petites du premier ordre dont les carrés et les produits deux à deux sont négligeables.

Si donc on altère $H\mathbb{C}$ et $H'\mathbb{C}$ d'une même quantité, assez petite pour que la réfraction Aa' et la parallaxe Aa n'en soient point influencées ainsi que l'angle $Z_1a'b'$, et que l'on altère $H\odot$ et $H'\odot$ dans les mêmes conditions, la distance vraie obtenue par le calcul des formules (17 et (18) sera exacte.

Cette propriété est importante, car elle permet d'employer pour déterminer $H\mathbb{C}$ et $H\odot$ les éléments inexacts de l'estime; il faut seulement s'attacher à calculer avec précision les hauteurs réfractées $H'\mathbb{C}$ et $H'\odot$ qui correspondent aux hauteurs vraies obtenues.

On démontre, en outre, que toute erreur commise dans l'observation de Δ' se reporte à très peu près en vraie grandeur sur Δ.

Cela posé, voyons comment l'on pourra obtenir les hauteurs vraies $H\odot$ et $H\mathbb{C}$.

[1] FAYE, 1, p. 334.

A des époques aussi rapprochées que possible de l'observation de la distance, on se procurera la latitude par une culmination, et l'état de la montre sur le temps moyen local par une hauteur prise lors des circonstances favorables au calcul d'heure. On emploiera dans ce but le Soleil ou des étoiles au crépuscule. Si la montre était très imparfaite, il faudrait se borner à l'observation d'une distance lunisolaire, et attendre pour observer que le Soleil ait un azimut suffisant pour permettre le calcul d'heure.

En tenant soigneusement compte de l'estime entre les observations, on peut ramener les deux éléments, latitude et état sur le temps local, à l'instant de l'observation de la distance. Par des conversions de temps, on calcule les angles horaires des astres pour cet instant et il ne reste plus, pour obtenir leurs hauteurs vraies, qu'à appliquer à chacun d'eux la formule

$$\sin H = \sin L' \sin \text{☊} + \cos L' \cos \text{☊} \cos t,$$

dans laquelle on fait usage de L', latitude géocentrique, au lieu de L, latitude astronomique, afin d'obtenir les hauteurs toutes réduites au zénith des parallaxes. On sait que l'on a $L' = L - V$, et la valeur de V (angle à la verticale) s'obtient par le recueil de tables nautiques ou par la formule

$$V = \frac{0{,}0068}{2 \text{ arc } 1''} \sin 2L.$$

On emploie 6 décimales aux logarithmes et on exprime H☾ et H☉ à la seconde la plus voisine.

Cela fait, on procède au calcul de H'☾ et de H'☉. Ce calcul doit être fait avec soin, en tenant compte des dixièmes de seconde d'arc.

De $H\mathbb{C} = am$ on passe d'abord à la hauteur apparente $H_a\mathbb{C} = Am$. La *Connaissance des Temps* donne la parallaxe horizontale équatoriale II, et l'on en déduit la parallaxe horizontale locale ϖ par la formule du n° 150 :

$$\varpi = \mathrm{II} - \frac{1}{2}\,\mathrm{II}\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{L}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon^2 = 0{,}0068.$$

On verrait facilement, comme au n° 154, que la parallaxe en hauteur $P = Aa$ a pour expression :

$$P = \varpi \cos H_a\mathbb{C}.$$

On en calcule une première valeur approchée P_1 en substituant dans cette formule $H\mathbb{C}$ à $H_a\mathbb{C}$, et l'on a ainsi une valeur approchée $(H\mathbb{C} - P_1)$ de $H_a\mathbb{C}$; une deuxième approximation fait connaître définitivement P et l'on a :

$$H_a\mathbb{C} = H\mathbb{C} - P.$$

Il reste maintenant à calculer la réfraction. A cet effet il faut déterminer d'abord une valeur approchée de $h_r\mathbb{C}$, hauteur réfractée rapportée au zénith vrai; pour cela on ramène $H_a\mathbb{C}$ au zénith vrai en lui appliquant la correction $-V\cos Z$, dans laquelle Z est l'azimut déduit d'un relèvement au compas, puis on prend la réfraction moyenne R_m en fonction de $H_a\mathbb{C}$ dans la Table I de la *Connaissance des Temps*. On a ainsi $h_r\mathbb{C} = H_a\mathbb{C} - V\cos Z + R_m$; on peut alors calculer R comme il est dit aux n^{os} 147 et 148, en tenant compte de la pression et de la température.

Connaissant R, on a enfin :

$$H'\mathbb{C} = H_a\mathbb{C} + R.$$

Le calcul de $H'\odot$ est plus facile ; on peut se servir simplement de la Table III de la *Connaissance des Temps* (ou de la Table IV s'il s'agit d'une planète) pour obtenir P. Pour une étoile, cette correction est nulle. Une fois $H_a\odot$ obtenue, on achève le calcul de $H'\odot$ comme il vient d'être dit pour la Lune.

Correction de la distance observée. — Dans ce qui précède, on a supposé que l'observateur prenait directement la distance apparente des centres ; en réalité il n'en est pas ainsi, et l'angle observé est la plus courte distance du bord bien terminé de la Lune à l'un des bords du Soleil, ou à l'étoile. Il y a donc lieu d'apporter une correction à l'angle mesuré pour en conclure Δ'.

La réfraction déforme les disques des astres assez peu pour que l'on puisse admettre que la distance observée des bords est prise sur l'arc de grand cercle des centres.

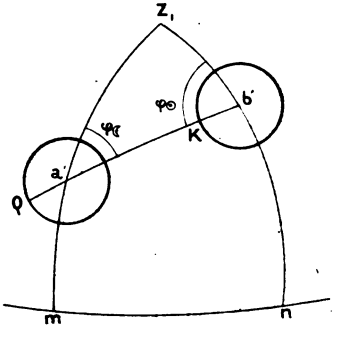


Fig. 54.

Si donc on a mesuré une distance telle que QK, il est clair que pour obtenir $\Delta' = a'b'$ il faudra retrancher le rayon $a'Q$ et ajouter le rayon $b'K$. Ces rayons sont un peu différents des demi-diamètres des astres ; pour les obtenir, il faut d'abord calculer les angles $Z_1a'b' = \varphi\,\mathbb{C}$ et $Z_1b'a' = \varphi\odot$. Aussitôt après l'observation on doit, dans ce but comme dans celui de la

correction des hauteurs, relever les astres au compas ; on en conclut les azimuts et l'on a, après avoir corrigé à vue l'angle observé des demi-diamètres :

$$\sin \varphi \, ☾ = \cos H' ⊙ \frac{\sin (Z ☾ - Z ⊙)}{\sin \Delta'},$$

$$\sin \varphi ⊙ = \cos H' ☾ \frac{\sin (Z ☾ - Z ⊙)}{\sin \Delta'}.$$

Il suffit de calculer à 3 décimales. Il importe peu, d'ailleurs, que l'on confonde les angles φ avec leurs suppléments, car on ne se sert ensuite que des cosinus carrés.

Les angles φ connus, on calcule les rayons apparents de la manière suivante.

On prend dans la *Connaissance des Temps* le demi-diamètre géocentrique δ ; à l'aide de la parallaxe horizontale déjà employée pour le calcul des H', on obtient le demi-diamètre en hauteur δ' par la formule :

$$\delta' = \delta(1 + \varpi'' \text{ arc } 1'' \sin H_a).$$

(Pour le Soleil on peut prendre $\delta' = \delta$.)

Et l'on a enfin le rayon cherché δ'' en écrivant :

$$\delta'' = \delta' - \frac{0'',26}{\sin^2 H'} \cos^2 \varphi.$$

Les calculs des corrections des parallaxes et demi-diamètres peuvent être abrégés par l'emploi des tables *ad hoc* que l'on trouve dans les recueils nautiques.

Remarque. — Quand on prend une distance lunisolaire, on peut observer les hauteurs au lieu de les calculer, si l'horizon n'est pas embrumé. En ce cas la distance est toujours assez grande pour que ce procédé n'ait pas d'inconvénients.

Il faut alors déduire des hauteurs mesurées leurs valeurs vraies et réfractées rapportées au zénith des parallaxes.

A cet effet, on applique tout d'abord les corrections de collimation, d'excentricité et de dépression. On calcule ensuite le demi-diamètre en hauteur δ', puis le demi-diamètre réfracté δ''. On peut confondre ici le demi-diamètre vertical avec le demi-diamètre incliné qui a servi à la correction de la distance, car la différence affectera de la même manière H′ et H.

En ajoutant ou en retranchant δ'' de la hauteur corrigée, selon le bord observé, on obtient la hauteur apparente réfractée h_r, rapportée au zénith vrai. Pour ramener h_r au zénith des parallaxes, on lui applique la correction $V \cos Z$, et l'on a $H' = h_r + V \cos Z$. A partir de ce moment, le calcul doit être conduit avec la plus grande précision; on calcule la réfraction R en fonction de h_r, on en conclut $H_a = H' - R$, puis

$$H = H_a + \varpi \cos H_a.$$

Mais l'observation des hauteurs est assez délicate, à moins que trois personnes n'opèrent simultanément, l'une mesurant la distance et les deux autres les hauteurs à un signal donné par la première. Lorsque l'observateur est seul, il est obligé de prendre des séries de hauteurs des deux astres avant et après l'observation de la distance, afin de pouvoir conclure par interpolation les valeurs contemporaines des éléments mesurés.

248. **Occultations**. — On sait que l'on nomme *occultation* l'éclipse par la Lune d'un astre autre que le Soleil.

L'observation de l'occultation d'une étoile est un excellent moyen d'obtenir l'heure de Paris. Lorsque la latitude est exactement connue, la précision de la méthode ne laisse rien à désirer; à vrai dire, l'inexactitude des coordonnées tabulaires de la Lune introduit une erreur de quelques secondes de temps dans le résultat, mais cela n'a pas d'importance à la mer. Le calcul de réduction est plus facile que celui des distances lunaires; de plus, l'observation en elle-même est très simple, ne nécessitant l'emploi d'aucun instrument de mesure des angles, mais seulement l'appréciation de l'heure d'un phénomène instantané; enfin l'erreur d'observation sur le temps de la disparition ou de la réapparition de l'étoile se reporte sur le résultat avec un facteur qui, en moyenne, ne diffère pas beaucoup de l'unité, à moins que l'occultation ne soit de courte durée.

Il semble donc que l'on soit ici en présence de la méthode par excellence pour la détermination des longitudes en mer, ou pour le contrôle des chronomètres à la fin d'une longue traversée. Mais pour que la fréquence du phénomène soit véritablement appropriée aux besoins de la pratique, il faut pouvoir observer les occultations des étoiles faibles jusqu'à la septième grandeur, et cela au voisinage même de la pleine Lune; on doit donc recourir à l'emploi d'une lunette assez puissante. Un instrument de 81 millimètres d'ouverture et grossissant 60 fois nous a donné, *à terre*, toute satisfaction; sa grande longueur (1 mètre environ) n'en permet plus l'usage à la mer. Un observateur exercé réussit en effet, sans trop de peine, à maintenir l'image de la Lune à peu près immobile dans le champ d'une

lunette malgré les mouvements du navire, mais à la condition que l'instrument soit assez court et assez léger pour pouvoir être manœuvré à la main, sans aucun appui.

Les jumelles relativement puissantes que l'on peut actuellement se procurer ne permettent l'observation de l'occultation d'une étoile comprise entre la quatrième et la septième grandeur que lorsque le croissant de la Lune est peu développé, ce qui est insuffisant; cependant la solution du problème ne paraît pas absolument impossible, mais elle n'est pas encore, à notre connaissance du moins, un fait accompli.

En raison de cette insuffisance de moyens d'observation, la méthode des occultations ne peut être considérée aujourd'hui comme d'une application courante à la mer, et nous ne nous en occuperons pas davantage; nous renverrons le lecteur à la brochure *les Occultations des étoiles,* par MM. Beuf et Perrin, lieutenants de vaisseau (Paris, Berger-Levrault, 1882) : c'est le meilleur guide que nous puissions conseiller.

APPENDICE

NOTE SUR LE CALCUL LOGARITHMIQUE

§ 1. — Tables logarithmiques.

Composition des Tables. — Les tables logarithmiques comprennent trois parties distinctes :

1° Logarithmes décimaux des nombres entiers ;

2° Logarithmes décimaux des fonctions circulaires ;

3° Logarithmes décimaux d'addition et de soustraction, ou logarithmes de Gauss.

Ces tables ont été dressées à 3, 4, 5, 6, 7 et même 8 décimales. Le nombre de décimales à employer dépend naturellement de l'approximation que l'on a en vue ; nous nous en occuperons plus loin.

Logarithmes des nombres. — La première table permet de calculer le logarithme d'un nombre quelconque, écrit sous forme décimale. Elle donne directement la mantisse en regard du nombre, abstraction faite de la position de la virgule. La caractéristique est déterminée par le calculateur, à l'aide de la règle bien connue ; inversement, la caractéristique fait connaître la position de la virgule lorsqu'on veut remonter du loga-

rithme au nombre correspondant, second problème aisément résolu par la même table.

Logarithmes des fonctions circulaires. — La deuxième table donne les logarithmes des fonctions circulaires, en regard de l'angle.

L'argument de cette table ne s'étend, en général, que de 0° à 90°; certaines tables, cependant, vont jusqu'à 180°.

Quelle que soit la valeur d'un angle, de 0° à 360°, il est bien facile de trouver l'argument d'entrée, même lorsque la table ne comprend que le premier quadrant.

En effet, si l'angle donné θ appartient au deuxième quadrant, l'angle $(\theta - 90°)$ est inscrit dans la table et ses six lignes *sin. séc. tang. cos. coséc. cotg.* sont respectivement les mêmes, en valeur absolue, que les *cos coséc. cotg. sin. séc. tang.* du proposé. Si θ appartient au quatrième quadrant, il en est de même relativement à l'argument $(\theta - 270°)$. Enfin si θ appartient au troisième quadrant, l'argument $(\theta - 180°)$ a les mêmes lignes que le proposé, en valeur absolue. Mais on doit se préoccuper du signe à attribuer aux lignes d'un angle supérieur à 90°; nous reviendrons sur ce point.

La plupart des tables ne donnent que les logarithmes des quatre fonctions *sin. tang. cotg.* et *cos.* On obtient les logarithmes des deux autres fonctions, savoir la *cosécante* et la *sécante*, en prenant respectivement les cologarithmes du *sinus* et du *cosinus*.

Logarithmes de Gauss. — La table des logarithmes d'addition et de soustraction est un complément indispensable des deux premières. Elle permet de calculer logarithmiquement des expressions qui se présentent

sous la forme binôme: on n'est plus ainsi astreint à une transformation préablable de la formule, transformation qui ne s'obtient qu'à l'aide d'un calcul supplémentaire (détermination d'un angle auxiliaire; ou, encore, série d'opérations arithmétiques effectuées sur les données).

Mode d'emploi et choix d'une table. — Les logarithmes inscrits dans les tables correspondent à des valeurs équidistantes de l'argument (nombre, angle ou logarithme), et l'échelon de cet argument est choisi assez petit pour que, dans l'intervalle, on puisse admettre sans erreur sensible que le logarithme varie proportionnellement à l'argument : l'interpolation est donc très simple.

Dès que le nombre des décimales logarithmiques est supérieur à 4, les bonnes tables sont munies de petits tableaux de parties proportionnelles qui, placés en marge, facilitent beaucoup l'interpolation. Ces tableaux doivent exister dans les tables de Gauss comme dans les autres parties des tables, et donner les produits exacts des différences tabulaires par les neuf premiers multiples de 0,1, et non pas seulement les parties entières de ces produits.

Les explications qui précèdent les tables donnent toutes les indications nécessaires à la recherche du logarithme étant donné l'argument, et inversement. Il est donc inutile de s'occuper de la résolution de ces deux problèmes.

Le choix d'une table est important; la fatigue du calculateur et les chances d'erreurs s'accroissent lorsque l'exécution typographique laisse à désirer, tant sous le

rapport de la forme des chiffres employés que sous celui de leur espacement, de la disposition des lignes et des colonnes, et enfin des traits de repère.

D'autre part, une table unique est insuffisante pour répondre aux besoins du navigateur : on verra plus loin pourquoi il est avantageux, indispensable même d'employer la table qui convient au calcul que l'on se propose d'effectuer. En fait, les calculs de position à la mer doivent s'effectuer à 5 ou 4 décimales[1]; les calculs d'heure par la hauteur pour le réglage des chronomètres exigent 6 décimales au moins; enfin, pour les calculs de positions géographiques précises ou ceux relatifs à la triangulation hydrographique, il faut 7 décimales.

Ajoutons enfin qu'une table à trois décimales, tenant tout entière en une seule feuille de papier, rend des services très appréciables dans les interpolations et peut dispenser de l'emploi de la plupart des tables spéciales auxquelles on a recours, habituellement, dans la pratique de la navigation. Une règle à calcul convient aussi très bien pour cet objet.

§ 2. — Exécution des calculs.

Nombre de décimales à employer. — On adoptera pour règle de calculer toujours avec le nombre de décimales minimum, en employant la table appropriée.

[1] S'il est vrai qu'on puisse employer une table à sept décimales pour calculer à un nombre de décimales inférieur en n'écrivant pas les chiffres inutiles, il n'en reste pas moins un feuilletage pénible qu'on a tout intérêt à diminuer.

Cette règle a son importance, puisque d'une part le calcul lui-même s'allonge nécessairement quand le nombre des décimales employées s'accroît, et que, d'autre part, le feuilletage de la table devient plus pénible dans les mêmes circonstances. D'après le célèbre calculateur Encke, les temps nécessaires à l'exécution d'un même calcul logarithmique à 5, 6 *ou* 7 *décimales* sont entre eux comme les *nombres* 1, 2, 3.

Nous donnerons plus loin des indications au sujet de la détermination du nombre de décimales à employer.

Règle des signes. — On sait que les nombres négatifs n'ont pas de logarithmes; mais rien n'empêche de calculer par logarithmes la valeur absolue d'un produit, en considérant tous les facteurs comme positifs : on restitue ensuite, au résultat, le signe que l'on obtient par les règles de l'algèbre. Le procédé le plus commode consiste à faire suivre les logarithmes des quantités négatives de la lettre n, à mesure qu'on les écrit; le résultat est positif ou négatif selon que les n sont en nombre pair ou impair.

Lorsque l'expression à calculer est binôme, on commence par calculer les logarithmes des termes d'après la règle précédente. On examine ensuite si l'on doit ajouter ou retrancher les valeurs absolues des termes, dont les signes sont connus, et l'on exécute l'addition ou la soustraction à l'aide des logarithmes de Gauss. Le signe du résultat s'obtient enfin par les règles de l'algèbre.

On ne doit jamais perdre de vue qu'un angle n'est pas déterminé par une seule de ses lignes trigonométriques. Il faut encore connaître tout au moins le signe

d'une autre de ses lignes, qui ne soit pas l'inverse de la première. Ainsi, par exemple, le cosinus étant calculé, il faut avoir le signe d'une autre ligne à l'exception de la sécante qui ne peut fournir aucun renseignement.

Il arrive parfois que l'on connaisse, par la nature de la question, la demi-circonférence et même le quadrant dans lequel l'angle se termine; la considération du signe est alors secondaire, mais ce cas est loin d'être un cas général. Le plus souvent, une erreur de signe dans l'une des fonctions composantes fausse complètement le résultat que l'on déduit, à l'aide de la table, de la fonction calculée.

La figure ci-contre, que l'on doit avoir toujours présente à l'esprit, peut servir de critérium. Lorsqu'on connaît, en effet, les signes du sinus et du cosinus, les signes de toutes les autres lignes s'obtiennent facilement : la cosécante a le signe du sinus, la sécante celui du cosinus, la cotangente celui de la tangente; cette dernière, enfin, a le signe du quotient du sinus par le cosinus.

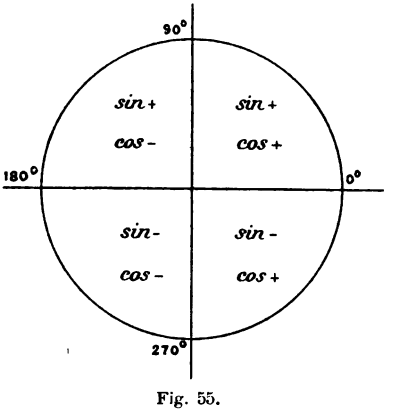


Fig. 55.

Prescriptions générales; ordre des opérations. — Il est avantageux de se servir de papier quadrillé à 4 ou 5 millimètres. Le format doit être suffisant pour que le

calcul entier, — ou du moins sa partie la plus importante, — puisse tenir en une seule page. Le format 37 centimètres sur 23 centimètres convient très bien aux calculs nautiques.

Ne jamais se presser : autrement, c'est s'exposer à de fréquentes erreurs dont la recherche fait perdre plus de temps qu'on n'en aurait employé en calculant posément. Rechercher l'économie de temps et de peine par la méthode ainsi que par l'emploi de bonnes tables appropriées au calcul à exécuter.

Ne rien écrire d'inutile, notamment la notation (log) ; s'il s'agit du nombre lui-même, on écrit le signe = entre l'indication algébrique et la valeur arithmétique, pour éviter toute confusion, et seulement dans ce cas.

L'emploi du *cologarithme* ne paraît un peu avantageux que lorsque la quantité à calculer est une fraction ayant au numérateur le produit de deux facteurs au moins, et au dénominateur un seul nombre. S'il n'en est pas ainsi quant au nombre des facteurs, il est préférable de calculer séparément les logarithmes des deux termes de la fraction et d'en faire la différence : les additions et leur vérification sont en effet plus faciles et plus rapides quand les logarithmes sont moins nombreux, et on peut vérifier la soustraction finale par une addition ; enfin la suppression de la transformation en cologarithmes des logarithmes des facteurs du dénominateur évite des chances d'erreur.

Lorsqu'on s'arrête à un certain ordre d'unités, il faut avoir égard aux chiffres suivants, pour arrondir le dernier chiffre conservé : on force, ou non, celui-ci d'une unité selon que le chiffre suivant est supérieur ou in-

férieur à 5. Si le chiffre en question est un 5 suivi d'un chiffre significatif au moins, il faut forcer; mais si le 5 est seul ou suivi d'un 0, il y a doute : si l'on doit additionner ou multiplier deux nombres arrondis dans ces conditions, on évite de forcer les deux; si l'on doit opérer une soustraction ou une division, il faut au contraire forcer les deux ou n'en forcer aucun.

Lorsqu'on doit combiner une quantité constante, par voie d'addition ou de soustraction, avec une suite de nombres, il est avantageux d'écrire cette quantité une fois pour toutes sur le bord inférieur d'un papier mobile : on peut ainsi amener la constante à la place convenable pour effectuer commodément les opérations successives dont il s'agit.

Par-dessus tout, il est indispensable de procéder avec méthode et de disposer clairement les calculs, autant pour éviter les erreurs que pour les reconnaître s'il y a lieu :

1° Écrire les formules à employer; réunir et inscrire les données numériques.

2° Faire le canevas des calculs, d'après les formules, en laissant en blanc la place des logarithmes à côté de l'indication correspondante. Celle-ci est écrite de manière à ce que les logarithmes soient sur la même ligne que les données auxquelles ils se rapportent et que, une fois inscrits, ils se trouvent tout disposés pour l'addition : c'est la disposition en *ligne de colonnes*, avantageuse lorsque les différentes formules ne comprennent chacune qu'un seul état des données (Voir les exemples numériques des planches II et III).

Mais lorsqu'on doit calculer une même formule pour divers états des données, il vaut mieux disposer

en une colonne unique tout le calcul qui se rapporte au même état des données et accoler à la même hauteur les colonnes relatives à chaque calcul de la formule : c'est la disposition en *colonnes accolées* (Voir l'exemple numérique de la planche IV). Il y a ainsi économie de notations et de surface, économie d'autant plus grande que le nombre des calculs semblables est plus élevé.

3° Rechercher tous les logarithmes, en prenant successivement tous ceux qui correspondent à la même donnée ou à des quantités peu différentes, afin de simplifier le feuilletage. Cette recherche doit être faite à part; on écrit toutes les parties proportionnelles, évitant ainsi les opérations mentales et se ménageant des vérifications faciles.

4° Inscrire les logarithmes dans le cadre préparé. Exécuter alors le calcul proprement dit, et *vérifier chaque addition ou soustraction immédiatement après l'avoir faite*. Appliquer avec soin la règle des signes.

5° Rechercher les résultats à l'aide de la table.

Si l'exécution du calcul définitif dépend de calculs préliminaires, appliquer les règles précédentes à chacun des calculs partiels.

6° Faire la vérification générale du calcul, en ayant recours à une ou plusieurs formules, aussi simples que possible, renfermant à la fois les données et les résultats.

§ 3. — Précision du calcul.

Soit $N = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables.

En attribuant à ces variables des valeurs numériques $a, b, c, \ldots$, la formule représente une certaine valeur N_0 de la fonction :

$$N_0 = f(a, b, c, \ldots)$$

Lorsqu'on substitue à $x, y, z, \ldots$ des valeurs approchées $a', b', c', \ldots$ de $a, b, c, \ldots$ la formule ne donne qu'une valeur approchée N' de la fonction et l'erreur commise est $(N' - N_0)$.

D'autre part, comme le calcul logarithmique n'est qu'un calcul approché, le calculateur obtient en réalité une valeur approchée N'' de N' et, finalement, l'erreur totale du nombre calculé est $(N'' - N_0)$. Or on a, identiquement :

$$N'' - N_0 = (N'' - N') + (N' - N_0).$$

L'erreur $(N'' - N')$ est l'erreur de calcul proprement dite : elle peut être rendue aussi petite qu'on le désire.

La 2e partie $(N' - N_0)$ de l'erreur totale provient : 1° de ce que les données sont, les unes imparfaitement connues, les autres imparfaitement mesurées ; 2° de ce que le calculateur, dans un but de simplification, altère volontairement les valeurs numériques à employer. Dans le 1er cas l'erreur est indépendante du calculateur ; mais comme l'influence des erreurs commises sur les valeurs des données dépend généralement de ces valeurs elles-mêmes, l'observateur peut réduire cette influence en

choisissant convènablement les conditions de l'observation : on en voit un exemple au n° 181. Dans le 2e cas, l'erreur introduite dépend du calculateur, et nous aurons à examiner ici cette question ; nous allons tout d'abord nous occuper de l'erreur de calcul proprement dite.

Approximation du calcul logarithmique ; détermination du nombre de décimales à employer. — Le logarithme tabulaire d'un nombre est exact à moins de $\frac{0,5}{10^n}$ près, n étant le nombre de décimales de la table. Si le nombre donné figure dans la table, son logarithme est donc obtenu, par une simple lecture, à l'approximation ci-dessus.

Lorsque le nombre proposé tombe entre deux valeurs consécutives de l'argument, le logarithme s'obtient par interpolation. Si l'on fait usage de tableaux de parties proportionnelles donnant les produits exacts des différences tabulaires par les neuf premiers multiples de 0,1, il est facile de voir que la somme du logarithme tabulaire et de l'accroissement calculé n'est pas en erreur de plus de $\frac{0,5}{10^n}$. Mais lorsqu'on arrondit l'accroissement de manière à ne conserver que n décimales au résultat, on introduit une nouvelle erreur dont le maximum est aussi $\frac{0,5}{10^n}$. Ces deux erreurs se combinent par voie d'addition algébrique pour produire l'erreur totale du logarithme calculé, qui est ainsi comprise entre $-\frac{1}{10^n}$ et $+\frac{1}{10^n}$.

Dans le problème inverse, qui consiste à déterminer le nombre correspondant à un logarithme trouvé par

un calcul, il faut se demander d'abord à quelle approximation le calcul peut faire connaître le logarithme. Ce dernier est ordinairement obtenu par la combinaison, par voie d'addition ou de soustraction, de plusieurs autres logarithmes pris dans la table et exacts, d'après ce qui précède, à moins de $\frac{1}{10^n}$ près[1]; il est donc exact lui-même à moins de $\frac{p}{10^n}$ près, en représentant par p le nombre des logarithmes composants. Les erreurs de ceux-ci se comportent comme de véritables erreurs accidentelles, quant aux signes; mais elles échappent manifestement à la loi de Gauss, car la probabilité d'une valeur quelconque comprise entre $-\frac{1}{10^n}$ et $+\frac{1}{10^n}$ est évidemment la même. Nous ne pouvons donc appliquer la loi relative à l'erreur probable d'une somme; cependant, on peut se rendre compte expérimentalement qu'il y a généralement une large compensation d'erreurs, et l'on admet que l'erreur du logarithme-somme n'atteint pas $\frac{2}{10^n}$ lorsque p est 4 ou 5, ce qui n'est ordinairement pas dépassé.

On verrait de même qu'une table à n décimales permet d'obtenir le logarithme d'une fonction circulaire avec une erreur totale inférieure à $\frac{1}{10^n}$.

[1] Il y a toutefois lieu d'excepter le cas du calcul d'une différence $(a - b)$ au moyen de la table de soustraction. Lorsque l'argument $(\log a - \log b)$ devient inférieur à 0,3, la précision avec laquelle le logarithme soustractif est obtenu est inférieure à celle de cet argument, diminue avec lui et peut parfois n'être plus suffisante.

Dans le calcul d'un angle, connaissant le logarithme de l'une de ses lignes trigonométriques, l'approximation obtenue dépend de la nature de cette ligne. Les logarithmes des fonctions séc. et coséc. étant égaux, au signe près, à ceux du cosinus et du sinus, ces cas rentrent respectivement l'un dans l'autre. Le cosinus et la cotangente se ramenant à un sinus et à une tangente par la considération de l'angle complémentaire, il suffit, en définitive, d'examiner seulement ces deux dernières fonctions.

Par une analyse très simple, qu'il est inutile de reproduire ici, nous avons cherché l'expression de l'approximation obtenue en calculant un nombre ou un angle à l'aide de logarithmes à n décimales. Réciproquement nous donnons les formules qui permettent de déterminer le nombre de décimales à employer lorsqu'on veut obtenir une approximation fixée d'avance. En raison de l'emploi assez fréquent des fonctions $\sin^2\frac{\theta}{2}$ et $\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}$, nous faisons également figurer dans le tableau ci-dessous les formules qui s'y rapportent.

Pour l'établissement des coefficients numériques nous avons admis, ainsi qu'il a été dit, que l'erreur totale du logarithme calculé ne dépassait pas deux unités du n^e ordre décimal ; nous y avons ajouté le maximum $\frac{0.5}{10^n}$ de l'erreur que l'interpolation peut introduire lorsqu'on remonte du logarithme au nombre ou à l'angle correspondants.

TABLEAU DES FORMULES D'APPROXIMATION

n, *nombre de décimales des logarithmes.*

Calcul d'un nombre N à une approximation $\Delta N = \pm \frac{q}{10^m}$:

$$\Delta N = \frac{5{,}76}{10^n} N,$$
$$n = m + 0{,}76 + \log N - \log q.$$

Calcul d'un angle θ par log sin θ :

$$\Delta\theta = \frac{1187000''}{10^n} \operatorname{tg}\theta,$$
$$n = 6{,}075 + \log \operatorname{tg}\theta - \log \Delta\theta''.$$

Calcul d'un angle θ par log tg θ :

$$\Delta\theta = \frac{594000''}{10^n} \sin 2\theta,$$
$$n = 5{,}774 + \log \sin 2\theta - \log \Delta\theta''.$$

Calcul d'un angle θ par $\log \sin^2 \frac{\theta}{2}$:

$$\Delta\theta = \frac{1425000''}{10^n} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$
$$n = 6{,}154 + \log \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} - \log \Delta\theta''.$$

Calcul d'un angle θ par $\log \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$:

$$\Delta\theta = \frac{712000''}{10^n} \sin\theta,$$
$$n = 5{,}853 + \log \sin\theta - \log \Delta\theta''.$$

Remarque. — Lorsqu'on doit calculer un nombre par son logarithme, ou bien encore un angle par le logarithme de son sinus, l'application des formules précédentes exige que l'on connaisse soit une limite du résultat, soit une valeur approchée de ce résultat. Lorsque le calcul dépend de la tangente, on a immédiatement une limite supérieure de l'approximation en substituant l'unité au sinus du 2e membre. D'ailleurs les formules montrent que la précision est toujours plus grande dans le cas de la tangente; il est donc avantageux à ce point de vue de l'employer de préférence aux autres lignes.

Simplification des données. — Lorsque les données

sont connues à un degré de précision bien supérieur à celui auquel le résultat doit être obtenu, il est légitime de supprimer les subdivisions inutiles de l'unité principale, afin de ne pas être obligé d'exécuter le calcul avec une rigueur superflue. Il apparaît *a priori* comme très probable, par exemple, que l'erreur $(N' - N_0)$, commise en négligeant les secondes de la déclinaison d'un astre lorsqu'on veut calculer son azimut à $0^{\circ},5$ près en vue d'obtenir la variation du compas à la mer, doit être tout à fait négligeable. La question qui va nous occuper est de savoir jusqu'à quel point on peut se permettre des simplifications de ce genre.

La formule différentielle des accroissements finis, qui permet, sous certaines conditions, d'exprimer l'erreur du résultat en fonction linéaire des erreurs des données donne la méthode générale à suivre dans chaque cas. On calcule les valeurs numériques des coefficients différentiels qui répondent aux valeurs données des variables, et l'on examine ensuite quelles sont les erreurs maxima dont on puisse altérer les variables sans que la somme des termes dépasse l'approximation exigée. Ce calcul est effectué par logarithmes, à trois décimales, en arrondissant les variables dans chaque terme, de manière à ce que l'effet de ces altérations partielles soit d'augmenter le résultat final, somme arithmétique des différents termes; on adopte, dans le même ordre d'idées, une valeur convenable pour la fonction cherchée dont on connaît toujours, dans la pratique, une valeur suffisamment approchée pour qu'on soit dispensé de la calculer prématurément.

Mais cette étude ne laisse pas que d'être souvent fort longue, et le calculateur aurait parfois plus de béné-

fice à s'en dispenser et à employer les données avec toute la précision dont elles sont susceptibles, s'il devait appliquer de cette manière la méthode dans chaque cas.

Si l'équation à résoudre doit se présenter fréquemment dans la pratique, la première idée de simplification qui vienne à l'esprit est de calculer, une fois pour toutes, les valeurs numériques des coefficients différentiels en fonction de diverses valeurs des variables, échelonnées entre les limites que celles-ci ne doivent pas dépasser dans l'application.

Ces tableaux numériques dressés, une simple interpolation fait connaître les coefficients dont on a besoin et qui correspondent aux valeurs particulières des données.

Quand le nombre total des variables est supérieur à trois, le calcul de ces tableaux exige la construction de tables étendues, et par suite beaucoup de temps. Aussi se contente-t-on ordinairement de rechercher les valeurs maxima que puissent acquérir les coefficients différentiels dans les applications, et d'en déduire les simplifications permises dans ces circonstances : on les adopte d'une manière générale, et l'on est ainsi certain d'obtenir, dans tous les cas, le résultat du calcul à l'approximation requise. C'est de cette façon que nous avons opéré pour indiquer l'unité à conserver dans les divers calculs de navigation.

Lorsque l'équation à résoudre ne rentre pas dans les cas habituels, on peut néanmoins, avec un peu d'attention, mener le calcul de manière à obtenir le résultat à l'approximation désirée, sans effectuer de recherche préalable. A cet effet, on peut employer la règle pratique suivante.

Conserver dans les données le chiffre du dixième de l'unité dont on veut être sûr dans le résultat. Par exemple, si l'on veut calculer un angle à 1′ près, on exprime les données en degrés, minutes et dixièmes de minute. On détermine ensuite, par un calcul rapide, si l'on n'est pas déjà fixé sur ce point, le nombre de décimales à employer, puis on exécute le calcul. Au cours de ce calcul on examine si la dernière décimale des logarithmes successifs peut être influencée par une variation d'une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre conservé dans les données correspondantes : l'interpolation elle-même renseigne immédiatement le calculateur à ce sujet.

Si l'influence existe pour l'un des arguments, il suffit de tenir compte, dans cet argument, du chiffre décimal de l'ordre immédiatement inférieur à celui du dernier chiffre conservé. On ne sera obligé d'aller au delà que fort rarement.

TABLE I

RÉFRACTION ASTRONOMIQUE

h_v	log ρ	b	log β	b	log β	θ	log τ
10°	1,7515	710mm	$\bar{1}$,9703	775mm	0,0084	+ 5°	0,0081
11	39	720	65	6	89	6	65
12	58	730	9827	7	95	7	49
13	73	735	57	8	0101	8	33
14	85	6	63	9	06	9	17
		7	69	780	0,0112	+ 10	0,0000
15	1,7595	8	74	1	17	11	$\bar{1}$,9983
16	7603	9	80	2	23	12	67
17	09	740	$\bar{1}$,9886	3	28	13	51
18	14	1	91	4	34	14	35
19	19	2	97	5	39	15	19
		3	9902	6	44	16	03
20	1,7623	4	08	7	50	17	9887
21	27	5	14	8	55	18	72
22	30	6	19	9	61	19	56
23	33	7	25	790	0,0166	+ 20	$\bar{1}$,9841
24	35	8	31			21	26
		9	37			22	10
25	1,7637	750	$\bar{1}$,9943	θ	log τ	23	9795
26	39	1	48			24	80
27	40	2	54	— 25°	0,0599	25	65
28	42	3	59	20	0,0512	26	50
29	44	4	65			27	34
		5	71	— 15	0,0422	28	19
30	1,7646	6	76	14	05	29	03
40	51	7	82	13	0388	+ 30	$\bar{1}$,9688
50	56	8	88	12	70	31	72
60	57	9	94	11	52	32	57
70	58	760	0,0000	— 10	0,0334	33	42
80	58	1	05	9	18	34	28
90	58	2	11	8	01	35	14
		3	16	7	0284	36	00
		4	22	6	67	37	9585
		5	28	5	50	38	69
		6	33	4	33	39	54
		7	39	3	16	+ 40	$\bar{1}$,9538
		8	45	2	0199	41	23
		9	50	— 1	82	42	09
		770	0,0056	0	66	43	9494
		1	61	+ 1	49	44	80
		2	67	2	32	45	65
		3	72	3	15	46	50
		4	78	4	0098	47	35
		5	84	5	81		

$R'' = f\rho \operatorname{cotg} h_r$

$f = \beta\tau.$

$b =$ hauteur du baromètre à mercure à la température de θ° centigrades.

$\theta =$ Température centigrade de l'air extérieur.

ANNEXE DE LA TABLE I

CALCUL DE b

Si le baromètre, observé en un lieu de latitude L, est à une température θ' différente de la température extérieure θ, on lit une hauteur b', différente de b.

Pour un baromètre à mercure à échelle en laiton, on a :

$$b = b' - 0^{mm},12\,(\theta' - \theta) + 0^{mm},0150 - 1^{mm},9 \cos 2\,L.$$

TABLE II

VALEURS ABSOLUES DU FACTEUR $f = -\operatorname{tg} L \sin Z$

CORRECTION D'AZIMUT POUR LE TRACÉ D'UNE DROITE DE HAUTEUR

$$Z'' - Z = f(h_v - h)$$

(Voir n° 223.)

Z \ L		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	L \ Z	
0°	360°	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	180°	180°
10	350	00	03	06	10	15	21	30	48	98	170	190
20	340	00	06	13	20	29	41	59	94	1,94	160	200
30	330	00	09	18	29	42	60	87	1,37	2,84	150	210
40	320	00	11	23	37	54	77	1,11	1,77	3,65	140	220
50	310	00	14	28	44	64	91	1,33	2,11	4,35	130	230
60	300	00	15	32	50	73	1,03	1,50	2,38	4,91	120	240
70	290	00	17	34	54	79	1,12	1,63	2,58	5,33	110	250
80	280	00	17	36	57	83	1,17	1,71	2,71	5,59	100	260
90	270	00	18	36	58	84	1,19	1,73	2,75	5,67	90	270

TABLE III

DROITE DE HAUTEUR PAR L'ÉTOILE POLAIRE (α PETITE OURSE)

Unité : la minute de degré $\left\{ \begin{array}{l} h = L + \delta' \cos t + c. \\ c = [\overline{1},877n] \operatorname{tg} L \sin^2 t. \end{array} \right.$

Unité : le degré. . . . $Z^o = 180^o - \delta^o \operatorname{séc} L \sin t.$

TABLE DES VALEURS DE c

L \ t	12ʰ 0ᵐ	13ʰ 1ʰ	14ʰ 2ʰ	15ʰ 3ʰ	16ʰ 4ʰ	17ʰ 5ʰ	18ʰ 6ʰ
+ 0°	— 0′,00	— 0′,00	— 0′,00	— 0′,00	— 0′,00	— 0′,00	— 0′,00
10	0	1	3	7	10	12	13
20	0	2	7	14	21	26	27
30	0	3	11	22	33	41	44
40	0	4	16	32	47	59	63
50	0	6	23	45	67	84	90
60	0	9	33	65	98	— 1 ,22	— 1 ,31
70	0	14	52	— 1 ,04	— 1 ,55	— 1 ,93	— 2 ,07
80	— 0 ,00	— 0 ,29	— 1 ,07	— 2 ,14	— 3 ,20	— 3 ,99	— 4 ,27
L \ t	12ʰ 24ʰ	11ʰ 23ʰ	10ʰ 22ʰ	9ʰ 21ʰ	8ʰ 20ʰ	7ʰ 19ʰ	6ʰ 18ʰ

TABLE IV

HAUTEUR VRAIE	m										
	10 M	15 M	20 M	25 M	30 M	35 M	40 M	45 M	50 M	55 M	60 M
50°. 0′	0M,0	0M,0	0M,1	0M,1	0M,2	0M,2	0M,3	0M,4	0M,4	0M,5	0M,6
60		0 ,1	0 ,1	0 ,2	0 ,2	0 ,3	0 ,4	0 ,5	0 ,6	0 ,8	0 ,9
70			0 ,2	0 ,2	0 ,4	0 ,5	0 ,6	0 ,8	1 ,0	1 ,2	1 ,4
74	0 ,1		0 ,2	0 ,3	0 ,5	0 ,6	0 ,8	1 ,0	1 ,3	1 ,5	1 ,8
78		0 ,2	0 ,3	0 ,4	0 ,6	0 ,9	1 ,1	1 ,4	1 ,7	2 ,1	2 ,5
80			0 ,3	0 ,5	0 ,7	1 ,0	1 ,3	1 ,7	2 ,1	2 ,5	3 ,0
81			0 ,4	0 ,6	0 ,8	1 ,1	1 ,5	1 ,9	2 ,3	2 ,8	3 ,3
82			0 ,4	0 ,6	0 ,9	1 ,3	1 ,7	2 ,1	2 ,6	3 ,1	3 ,7
83		0 ,3	0 ,5	0 ,7	1 ,1	1 ,5	1 ,9	2 ,4	3 ,0	3 ,6	4 ,3
84			0 ,6	0 ,9	1 ,2	1 ,7	2 ,2	2 ,8	3 ,5	4 ,2	5 ,0
84 .30			0 ,6	0 ,9	1 ,4	1 ,9	2 ,4	3 ,1	3 ,8	4 ,6	5 ,4
85 . 0	0 ,2	0 ,4	0 ,7	1 ,0	1 ,5	2 ,0	2 ,7	3 ,4	4 ,2	5 ,0	6 ,0
85 .30			0 ,7	1 ,1	1 ,7	2 ,3	3 ,0	3 ,7	4 ,6	5 ,6	6 ,7
86 . 0		0 ,5	0 ,8	1 ,3	1 ,9	2 ,5	3 ,3	4 ,2	5 ,2	6 ,3	7 ,5
20			0 ,9	1 ,4	2 ,0	2 ,8	3 ,6	4 ,6	5 ,7	6 ,9	8 ,2
40		0 ,6	1 ,0	1 ,6	2 ,2	3 ,0	4 ,0	5 ,1	6 ,2	7 ,6	9 ,0
87 . 0	0 ,3		1 ,1	1 ,7	2 ,5	3 ,4	4 ,4	5 ,6	6 ,9	8 ,4	10 ,0
10		0 ,7	1 ,2	1 ,8	2 ,6	3 ,6	4 ,7	6 ,0	7 ,3	8 ,9	10 ,6
20			1 ,2	2 ,0	2 ,8	3 ,8	5 ,0	6 ,3	7 ,8	9 ,4	11 ,2
30			1 ,3	2 ,1	3 ,0	4 ,1	5 ,3	6 ,7	8 ,3	10 ,1	12 ,0
40	0 ,4	0 ,8	1 ,4	2 ,2	3 ,2	4 ,4	5 ,7	7 ,2	8 ,9	10 ,8	12 ,9
50		0 ,9	1 ,5	2 ,4	3 ,5	4 ,7	6 ,2	7 ,8	9 ,6	11 ,6	13 ,8
88 . 0			1 ,7	2 ,6	3 ,7	5 ,1	6 ,7	8 ,4	10 ,4	12 ,6	15 ,0
10	0 ,5	1 ,0	1 ,8	2 ,8	4 ,1	5 ,6	7 ,3	9 ,2	11 ,4	13 ,7	16 ,4
20		1 ,1	2 ,0	3 ,1	4 ,5	6 ,1	8 ,0	10 ,1	12 ,5	15 ,1	18 ,0
30	0 ,6	1 ,2	2 ,3	3 ,4	5 ,0	6 ,8	8 ,9	11 ,3	13 ,9	16 ,8	20 ,0
40		1 ,4	2 ,5	3 ,9	5 ,6	7 ,7	10 ,0	12 ,7	15 ,6	18 ,9	22 ,5
50	0 ,7	1 ,6	2 ,9	4 ,5	6 ,4	8 ,7	11 ,4	14 ,5	17 ,9	21 ,6	25 ,7
89 . 0	0 ,8	1 ,9	3 ,3	5 ,2	7 ,5	10 ,2	13 ,3	16 ,9	20 ,8	25 ,2	30 ,0

Table donnant l'écart (en milles) entre les divers points d'une courbe de hauteur et la tangente menée à cette courbe par le point déterminatif. Pour l'usage de la Table, voir le n° 225.

ANNEXE DE LA TABLE IV

Z	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cos Z	1,00	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0,00

par des hauteurs co

9o6, par L = 37°.5(
ieur du soleil.
lieu.

G =	$-1^h.25^m.11^s,2$(
$\mathcal{O}$ =	$-11°.52'$
v =	$-52'',09$
re, Ev_o =	$23^h.44^m.14^s,$
δEv_o =	$+0,$
Ev =	23 .44 .15 ,
+ G =	— 1 .25 .11 ,
Tmp =	22 .19 . 4 ,0
M_o =	10 58 .56 ,9
$\mathcal{E}_m$ =	11 .20 . 7 ,
	2

droite de hauteur.

les du n° 220.

par L = — 39°.17′, G = + 45°.4′ (position estimée),
°. Élévation de l'œil 10ᵐ.0. ε = — 2′.0″; correction
: A — M = 4ʰ.17ᵐ.21ˢ,8 et $\mathcal{L}_a$ = 5ʰ.15ᵐ.25ˢ,4.
e de hauteur.

ÉMENTS DE L'ASTRE

°.3′,7	Em_o = 23ʰ.47ᵐ.45ˢ,2
3,4	δEm_o = + 1,8
.0,3	Em = 23 .47 .47,0
42′,7	cte..... 0,249
2,5	$\sqrt{10}$ ... 0,500
40,2	d,..... 0,749
6,2	d = 5′,6
34,0	R_m = 0,6
16,2	$d + R_m$ = 6,2
50,2	

CALCUL DE t

$Tvg = Tmp + Em - G$
Tmp = 3ʰ.31ᵐ. 4ˢ,2 le 3 mars
Em = 23 .47 .47,0
Tvp = 3 .18 .51,2 le 3
Tvp = 49°.42′,8
— G = — 45 . 4
t = 4 .38,8

E h ET DE Z

L cos Ⓓ cos t
cos $\bar{1}$,88875
cos $\bar{1}$,99675
cos $\bar{1}$,99857
a $\bar{1}$,88407

sin Z = cos Ⓓ sin séc h
cos $\bar{1}$.9967
sin $\bar{2}$,9086
séc. h 0,2692
sin Z $\bar{1}$,1745

sin L sin h — sin Ⓓ < 0
$\bar{1}$,73n $\bar{1}$,09n
cos Z < 0
Z = 171°,4

T. et d'une table de logarithmes ordinaires.)

ne droite de hauteur.

du n° 221.
9o6, par L = — 5°.1′, G = -
on de l'œil 8ᵐ,5. ε = + 1′.5(
.34ˢ.7.
e hauteur.

ÉLÉMENTS DE L'ASTRE

+ 0°.11′.1	$Em_o = 0^h.7^m.22^s,5$
+ 3,5	$\delta Em_o =$ + 3,1
+ 0 . 7,6	$Em =$ 0 .7 .25 ,6
82°.0′,5	C^te..... 0,249
+ 0,7	$\sqrt{8,5}$ .. 0,465
82 .1,2	d..... 0,714
— 5,3	$d = 5',2$
81 .55.9	$R_m = 0,1$
+ 16,0	$d + R_m = 5,3$
82. 11,9	

CUL DE h ET DE Z

$m \cos \psi = \cos \mathcal{D} \cos t$ cos h s
$\sin h = m \cos (L - \psi)$

cos	0,0000
cos	$\bar{1}$,9975
$m \cos \psi$	$\bar{1}$,9975

cos h :
cos h (

m	$\bar{1}$,9975
cos	$\bar{1}$,9982
sin h	$\bar{1}$,9957
cos h	$\bar{1}$,1415
tg h	0,8542

$h = 82°.\ 2',2$..... vérification

$h_v =$	82 .11 ,9
$h_v - h =$	+ 9′,7

sensiblement sim

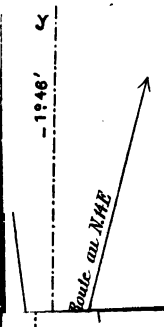
ur le *Bougainville*
.46′, on a observ

ique du Point.

O

	ÉLÉVATION DE L'ŒIL	
n. 5s	8m,8	La r
.31	8 ,2	temps
. 0	7 ,1	au mo
.50	7 ,1	deman
.59	8 ,2	deman
.40	8 ,2	Le r

A elle 4mm pour 1 mille.



ES HORAIRES ESTIM

N° 2	N° 3
0h.57m.54s,3	5h.9m.45s,
38°.58′,0	16°.23′,8
— 7,7	— 9,
0,1093	0,0180
$\bar{1}$,6679	$\bar{1}$,8426
$\bar{1}$,9411	$\bar{1}$,6762 *n*
$\bar{1}$,7183	$\bar{1}$,5368 *n*
< 0	< 0
148°,5	200°,1

point probable Z_o, on relève sur le
$=+3^{mm},0$; $y_o = -29^{mm},0$.

$+1'4$; $dL = -\frac{29}{4} = -7',2$,

au N14E
—
—
—
—

2m
tre

$$\left\{ \begin{array}{l} L_o = +57°.44',8 \\ G_o = -\ 1\ .44\ ,6 \end{array} \right.$$

e temps sidéral du mér
ce dernier la petite corr
a ainsi obtenu la corre

— L'état $(Tsg - M)_i$ du compteur moyen sur
$\delta\ i$, a été déduit de $(Tsg - M)_{i-1}$ en ajoutant à
neures M ayant été exprimée en *minutes de temps*, o

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

ANDRADE. — *Chronométrie,* Bibliothèque des mathématiques appliquées, E. S.

BOURGEOIS. — *Géodésie,* Bibliothèque des mathématiques appliquées, E. S.

BRUNNOW. — *Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique,* traduction française par MM. E. LUCAS et C. ANDRÉ; Paris, 1869, Gauthier-Villars.

CASPARI. — *Les Chronomètres de marine;* Paris, Gauthier-Villars et G. Masson.

CAILLET. — *Tables des logarithmes et cologarithmes à 6 décimales, suivies d'un recueil des tables astronomiques et nautiques;* Vannes, 1884, maison de Lamarzelle, librairie Eugène Lafolye.

DE MAGNAC. — Cf. YVON-VILLARCEAU.

FAYE. — *Cours d'astronomie nautique;* Paris, 1880, Gauthier-Villars.

FRIOCOURT. — *Tables de logarithmes et tables de navigation;* Paris, 1905, A. Challamel.

GERMAIN. — *Traité d'hydrographie;* Paris, 1882, Imprimerie nationale.

GUYOU. — 1. *Les Problèmes de navigation et la carte marine. Types de calculs et tables complètes;* Paris, Berger-Levrault.
2. et WILLOTTE, *Cours élémentaire d'astronomie;* 1893, Paris-Nancy, Berger-Levrault.
3. *Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique;* Paris, Berger-Levrault.
4. *Compas et instruments nautiques,* conférences faites à l'École supérieure de marine, 1898-1899; Paris, Imprimerie nationale.
5. *Manuel des instruments nautiques;* Paris, 1899, Imprimerie nationale.

OCAGNE (M. D'). — *Calcul graphique et nomographie;* Paris, 1907, Bibliothèque des mathématiques appliquées, E. S.

PERRET.
1. Note sur quelques applications de la nomographie à l'astronomie nautique, *Annales hydrographiques de* 1904; Paris, Imprimerie nationale.
2. Note sur la construction d'un nomogramme à points alignés pour le calcul de l'équation des hauteurs correspondantes du soleil, *Revue maritime* d'avril 1905; Paris, Chapelot.
3. Sur l'application de la nomographie aux principales tables nautiques, *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences;* Paris, secrétariat de l'Association, 25, rue Serpente.

PERRIN.
1. *Nouvelles tables destinées à abréger les calculs nautiques,* 4e édition; Paris, 1906, A. Challamel.
2. BEUF ET PERRIN. *Les Occultations des étoiles par la lune;* Paris, 1882, Berger-Levrault.
3. *Détermination exacte de la latitude et du temps du lieu à l'aide d'observations au sextant par la méthode des hauteurs égales d'étoiles;* Paris, 1888, Gauthier-Villars.
4. *Détermination du point par les hauteurs circumzénithales correspondantes;* Paris, 1884, Berger-Levrault.

SCHWÉRER. *Étude sur l'emploi du sextant pour les observations de précision;* Paris, Beaudoin.

YVON-VILLARCEAU et DE MAGNAC. *Nouvelle navigation astronomique,* Paris, 1877, Gauthier-Villars.

WILLOTTE. Voir GUYOU, 2.

OUVRAGES INÉDITS CONSULTÉS

(*Cours autographiés de l'École navale.*)

BONHOMME. *Cours d'astronomie et de navigation,* 1906-1907.

GUYOU. *Cours d'astronomie et de navigation,* 1884.

JEANNIOT. *Cours d'astronomie et de navigation,* 1906-1907.

PERRET. *Cours d'observations et de calculs nautiques,* 1905-1907.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS ET DES MATIÈRES

Accélération, 238.
Alignement, 65.
Approximation, 352.
Angle de route, 3.
Angle horaire, XIV.
Ascension droite, XIII.
Axe optique, 133.
Azimut, XVIII.
— loxodromique, 24.
— orthodromique, 61.
BAULE, 21-181.
BORDA, 330.
BRUNNOW, 216.
CASPARI, 237.
CLAUDE, 219.
Cap au compas, 4.
Cap vrai, 8.
Cartes marines, 29.
Cercle de hauteur, 249.
Changement en latitude, 72.
— en longitude, 72.
Chemin est-ouest, 73.
— nord-sud, 72.
Chronomètres, 196.
Collimation, 130.
Comparaisons, 198.
Compas, 1.
Connaissance des temps, 99.
Conversion des temps, 105.
Correction d'azinut, 267.
— des hauteurs, 168.
— des relèvements, 10.
— des routes, 7.
Courbes de hauteur, 251.
DRIENCOURT, 219.
Déclinaison, 5.
Dépression, 168.
Dérive, 8.
Déviation, 8.
Distances lunaires, 326.
Droite de hauteur, 258.
Echelle de la carte, 42.
Ellipsoïde terrestre, XIV.
Etat absolu, 197.
Excentricité, 153.
FAVÉ, 181, 260.
FLEURIAIS, 21-167-181-295.
Flexion, 158.
FOURIER, 158.
GAUSS, 218-339-350.
GERMAIN, 66.
GIVRY, 63-244.
GUYOU, XIII-107-222-260-270-316.
HILLERET, 97.
Hauteurs circumméridiennes, 278-311.
— circumzénithales, 293.
— correspondantes, 220.
— égales, 218.
Horizons artificiels, 181.
Houache, 17.
Interpolation, 100.
JEANNIOT, 148.
KELLER, 97.
Latitude, XIII.
Levers et couchers des astres, 188.

Lochs, 15-16-20.
Longitude, XIII.
Loxodromie, 23.
Lunettes de nuit, 167.
Lunettes du sextant, 133-142-167.
MAGNAC (DE), 97-167-251.
MARCQ SAINT-HILAIRE, 260.
MERCATOR, 29-251.
Marche diurne, 225.
Mille marin, 16.
Miroirs du sextant, 125-134-136.
NEWCOMB, 104.
Navisphère, 97-296.
OCAGNE (D') (M.), 170.
Occultations, 336.
Orthodromie, 82.
PERRET, 14-77.
PERRIN, 14-15-218-222-271-294.
Point à midi, 286.
Point déterminatif, 260.
Point en vue de terre, 64.
Point estimé, 77.
Point observé, 285.
Point par hauteurs simultanées, 294.
RÉVEILLE, 239.
Réglage des chronomètres, 203.
Réglage du compas, 11.
ROLLET DE L'ISLE, 260.
SCHWÉRER, 181-222.
SOUILLAGOUET, 260.
Sextant, 124.
Temps civil, 110.
Triangle de position, XVII.
WILLOTTE, 107.
YVON-VILLARCEAU, 251.

TABLE SYSTÉMATIQUE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Problèmes de la navigation XI
Conventions et notations XIII
Données et formules relatives à l'ellipsoïde terrestre . . . XIV
Définitions. Formules de l'astronomie sphérique employées en navigation XVI

LIVRE I

NAVIGATION PAR L'ESTIME

CHAPITRE I

INSTRUMENTS DE L'ESTIME. LOXODROMIE

Compas 1
Définitions 3
Correction des routes 7
Correction des relèvements 10
Altération des routes 10
Réglage du compas 11
Loch ordinaire 16
Lochs de pression 20
Lochs remorqués 20
Estime des grandes vitesses 21
Loxodromie 23

CHAPITRE II

CARTES MARINES

Loi du canevas 29
Construction des cartes 37
Echelle de la carte 42
Usage des cartes 52

CHAPITRE III

POINT ESTIMÉ. NAVIGATIONS LOXODROMIQUE ET ORTHODROMIQUE

Navigation loxodromique 71
Formules de l'estime 72
Point estimé 77
Problème inverse 79
Navigation orthodromique 82
Distance orthodromique 87
Azimut initial de l'orthodromie 88
Tracé de l'orthodromie sur la carte marine 91
Navigation mixte 95

LIVRE II

NAVIGATION ASTRONOMIQUE

CHAPITRE I

CONNAISSANCE DES TEMPS

Éléments usuels 99
Interpolation 100
Conversion des temps simultanés 105
Changement de lieu 105
Changement d'astre 112
Problème général 123

CHAPITRE II

SEXTANT

Description sommaire. 124
Principe du sextant. 126
Point de parallélisme. Collimation. 130

Rectifications du sextant.

Rectification de l'axe optique de la lunette. 133
Perpendicularité des miroirs. 134

Erreurs du sextant.

1° Lunette. — Mise au point. 142
Inégale intensité des images. 143
Déviation de l'axe optique. 144
2° Miroirs. — Prismatisme. 147
Inclinaison du grand miroir. 148
3° Graduation. — Excentricité. 153
Erreurs de division. 157
Erreurs de flexion. 158

Usage du sextant.

Mesure de la collimation. 161
Mesure de l'angle de deux points. 162
Mesure d'une hauteur à l'horizon de la mer. 164
Lunettes de nuit. 167

CHAPITRE III

CORRECTION DES HAUTEURS

Dépression moyenne apparente de l'horizon de la mer. . . 168
Réfraction astronomique. 171
Correction des hauteurs observées à l'horizon de la mer. . 178

Horizons artificiels.

Horizon artificiel à la mer. 181
Horizon artificiel à terre. 182
Observation des hauteurs à l'horizon artificiel à terre. . . 185
Correction des hauteurs observées à l'horizon artificiel. . . 186
Erreurs à craindre sur les hauteurs. 187

Levers et couchers des astres.

Levers et couchers vrais. 188
Levers et couchers apparents. 190

CHAPITRE IV

CHRONOMÈTRES

État absolu. 197
Comparaison de deux montres. 198

Réglage des chronomètres.

Calcul d'heure par la hauteur. 203
Circonstances favorables au calcul d'heure. 207
Réduction par l'emploi des séries de hauteurs. 213
Calcul d'heure par la méthode des hauteurs égales d'étoiles. 218
Calcul d'heure par les hauteurs correspondantes 220
Comparaison à une pendule. 224
Signal horaire. 225

Détermination de la marche.

Marche diurne. 225
Calcul de l'heure du premier méridien à l'aide d'un chronomètre réglé. 227
État et marche les plus probables pendant une période d'observations. 228
Vérification de l'état en vue de terre. 234

Variations des marches.

Formule des marches. 235
Détermination des coefficients. 237
Méthode de M. Réveille. 239
Constance de la température 243
Marches relatives 244
Calcul de la marche à la mer. Contrôle réciproque des chronomètres 245

CHAPITRE V

DÉTERMINATION D'UN LIEU DU NAVIRE

Cercle de hauteur. 249
Courbes de hauteur. 251
Rayon de courbure d'une courbe de hauteur. 255
Droite de hauteur. 258
Substitution de la droite de hauteur à la courbe. 259
Détermination de la droite de hauteur. 260
Tracé de la droite. 266
Correction d'azimut. 267
Cas des grandes hauteurs 270
Tracé du cercle osculateur 271
Tracé de la courbe sur la carte 273
Cas particuliers. — 1° Étoile polaire 274
2° Observations circumméridiennes. . . 278

CHAPITRE VI

POINT OBSERVÉ

Utilisation des droites de hauteur. 284
Transport par l'estime. 285
Point à midi 286
Hauteurs circumzénithales correspondantes 293
Point par hauteurs simultanées. 294
Influence des erreurs des données sur le point conclu de deux observations. 298

CHAPITRE VII

NAVIGATION SANS CHRONOMÈTRES

Calcul d'heure. 307
Indications générales sur le calcul du point. 308
Calcul de latitude par une hauteur extra-méridienne. . . . 310
Latitude par des hauteurs circumméridiennes. 311
Méthode de réduction du commandant Guyou. 316
Culminations. 321
Latitude à l'instant du passage. 325
Distances lunaires. 326
Occultations. 336

APPENDICE

NOTE SUR LE CALCUL LOGARITHMIQUE

Tables logarithmiques. — Composition des tables. 339
Mode d'emploi et choix d'une table. 341
Exécution des calculs. — Nombre de décimales à employer. 342
Règle des signes. 343
Prescriptions générales ; ordre des opérations. 344
Précision du calcul. — Approximation du calcul logarithmique ; détermination du nombre de décimales à employer. 349
Tableau des formules d'approximation. 352
TABLES DIVERSES. 356
EXEMPLES NUMÉRIQUES. 359

OCTAVE DOIN, ÉDITEUR, 8, PLACE DE L'ODÉON, PARIS

ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE

Publiée sous la direction du Dr TOULOUSE

Nous avons entrepris la publication, sous la direction générale de son fondateur, le Dr Toulouse, Directeur à l'École des Hautes-Études, d'une ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE de langue française dont on mesurera l'importance à ce fait qu'elle est divisée en 40 sections ou Bibliothèques et qu'elle comprendra environ 1000 volumes. Elle se propose de rivaliser avec les plus grandes encyclopédies étrangères et même de les dépasser, tout à la fois par le caractère nettement scientifique et la clarté de ses exposés, par l'ordre logique de ses divisions et par son unité, enfin par ses vastes dimensions et sa forme pratique.

I

PLAN GÉNÉRAL DE L'ENCYCLOPÉDIE

Mode de publication. — L'*Encyclopédie* se composera de monographies scientifiques, classées méthodiquement et formant dans leur enchaînement un exposé de toute la science. Organisée sur un plan systématique, cette Encyclopédie, tout en évitant les inconvénients des Traités, — massifs, d'un prix global élevé, difficiles à consulter, — et les inconvénients des Dictionnaires, — où les articles scindés irrationnellement, simples chapitres alphabétiques, sont toujours nécessairement incomplets, — réunira les avantages des uns et des autres.

Du Traité, l'*Encyclopédie* gardera la supériorité que possède

un ensemble complet, bien divisé et fournissant sur chaque science tous les enseignements et tous les renseignements qu'on en réclame. Du Dictionnaire, l'*Encyclopédie* gardera les facilités de recherches par le moyen d'une table générale, l'*Index de l'Encyclopédie*, qui paraîtra dès la publication d'un certain nombre de volumes et sera réimprimé périodiquement. L'*Index* renverra le lecteur aux différents volumes et aux pages où se trouvent traités les divers points d'une question.

Les éditions successives de chaque volume permettront de suivre toujours de près les progrès de la science. Et c'est par là que s'affirme la supériorité de ce mode de publication sur tout autre. Alors que, sous sa masse compacte, un traité, un dictionnaire ne peut être réédité et renouvelé que dans sa totalité et qu'à d'assez longs intervalles, inconvénients graves qu'atténuent mal des suppléments et des appendices, l'*Encyclopédie scientifique*, au contraire, pourra toujours rajeunir les parties qui ne seraient plus au courant des derniers travaux importants. Il est évident, par exemple, que si des livres d'algèbre ou d'acoustique physique peuvent garder leur valeur pendant de nombreuses années, les ouvrages exposant les sciences en formation, comme la chimie physique, la psychologie ou les technologies industrielles, doivent nécessairement être remaniés à des intervalles plus courts.

Le lecteur appréciera la souplesse de publication de cette *Encyclopédie*, toujours vivante, qui s'élargira au fur et à mesure des besoins dans le large cadre tracé dès le début, mais qui constituera toujours, dans son ensemble, un traité complet de la Science, dans chacune de ses sections un traité complet d'une science, et dans chacun de ses livres une monographie complète. Il pourra ainsi n'acheter que telle ou telle section de l'*Encyclopédie*, sûr de n'avoir pas des parties dépareillées d'un tout.

L'*Encyclopédie* demandera plusieurs années pour être achevée ; car pour avoir des expositions bien faites, elle a pris ses collaborateurs plutôt parmi les savants que parmi les professionnels de la rédaction scientifique que l'on retrouve généralement dans les œuvres similaires. Or les savants écrivent peu et lentement : et il est préférable de laisser temporairement sans attribution certains ouvrages plutôt que de les confier à des auteurs insuffisants. Mais cette lenteur et ces vides ne présenteront pas d'in-

convénients, puisque chaque livre est une œuvre indépendante et que tous les volumes publiés sont à tout moment réunis par l'*Index de l'Encyclopédie*. On peut donc encore considérer l'Encyclopédie comme une librairie, où les livres soigneusement choisis, au lieu de représenter le hasard d'une production individuelle, obéiraient à un plan arrêté d'avance, de manière qu'il n'y ait ni lacune dans les parties ingrates, ni double emploi dans les parties très cultivées.

Caractère scientifique des ouvrages. — Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes : les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent incompréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années ; et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.

L'*Encyclopédie scientifique* a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions ; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord faite avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle représente, et sa devise pourrait être : *Par les savants, pour les savants*. Quelques-uns de ces livres seront même, par leur caractère didactique, destinés à devenir des ouvrages classiques et à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, toutes les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section, — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours le sens des mots spéciaux.

II

ORGANISATION SCIENTIFIQUE

Par son organisation scientifique, l'*Encyclopédie* paraît devoir offrir aux lecteurs les meilleures garanties de compétence. Elle est divisée en Sections ou Bibliothèques, à la tête desquelles sont placés des savants professionnels spécialisés dans chaque ordre de sciences et en pleine force de production, qui, d'accord avec le Directeur général, établissent les divisions des matières, choisissent les collaborateurs et acceptent les manuscrits. Le même esprit se manifestera partout : éclectisme et respect de toutes les opinions logiques, subordination des théories aux données de l'expérience, soumission à une discipline rationnelle stricte ainsi qu'aux règles d'une exposition méthodique et claire. De la sorte, le lecteur, qui aura été intéressé par les ouvrages d'une section dont il sera l'abonné régulier, sera amené à consulter avec confiance les livres des autres sections dont il aura besoin, puisqu'il sera assuré de trouver partout la même pensée et les mêmes garanties. Actuellement, en effet, il est, hors de sa spécialité, sans moyen pratique de juger de la compétence réelle des auteurs.

Pour mieux apprécier les tendances variées du travail scientifique adapté à des fins spéciales, l'*Encyclopédie* a sollicité, pour la direction de chaque Bibliothèque, le concours d'un savant placé dans le centre même des études du ressort. Elle a pu ainsi réunir des représentants des principaux Corps savants, Établissements d'enseignement et de recherches de langue française :

Institut.
Académie de Médecine.

Collège de France.
Muséum d'Histoire naturelle.
École des Hautes-Études.
Sorbonne et École normale.
Facultés des Sciences.
Facultés des Lettres.
Facultés de Médecine.
Instituts Pasteur.
École des Ponts et Chaussées.
École des Mines.
École Polytechnique.
Conservatoire des Arts et Métiers.
École d'Anthropologie.
Institut National agronomique.
École vétérinaire d'Alfort.
École supérieure d'Électricité.
École de Chimie industrielle de Lyon.
École des Beaux-Arts.
École des Sciences politiques.

Observatoire de Paris.
Hôpitaux de Paris.

III

BUT DE L'ENCYCLOPÉDIE

Au XVIIIe siècle, « l'Encyclopédie » a marqué un magnifique mouvement de la pensée vers la critique rationnelle. A cette époque, une telle manifestation devait avoir un caractère philosophique. Aujourd'hui, l'heure est venue de renouveler ce grand effort de critique, mais dans une direction strictement scientifique; c'est là le but de la nouvelle *Encyclopédie*.

Ainsi la science pourra lutter avec la littérature pour la direction des esprits cultivés, qui, au sortir des écoles, ne demandent guère de conseils qu'aux œuvres d'imagination et à des encyclopédies où la science a une place restreinte, tout à fait hors de proportion avec son importance. Le moment est favorable à cette tentative ; car les nouvelles générations sont plus instruites dans l'ordre scientifique que les précédentes. D'autre part la science est devenue, par sa complexité et par les corrélations de ses parties, une matière qu'il n'est plus possible d'exposer sans la collaboration de tous les spécialistes, unis là comme le sont les producteurs dans tous les départements de l'activité économique contemporaine.

A un autre point de vue, l'*Encyclopédie*, embrassant toutes les manifestations scientifiques, servira comme tout inventaire à mettre au jour les lacunes, les champs encore en friche ou abandonnés, — ce qui expliquera la lenteur avec laquelle certaines sections se développeront, — et suscitera peut-être les travaux nécessaires. Si ce résultat est atteint, elle sera fière d'y avoir contribué.

Elle apporte en outre une classification des sciences et, par ses divisions, une tentative de mesure, une limitation de chaque domaine. Dans son ensemble, elle cherchera à refléter exactement le prodigieux effort scientifique du commencement de ce siècle et un moment de sa pensée, en sorte que dans l'avenir elle reste le document principal où l'on puisse retrouver et consulter le témoignage de cette époque intellectuelle.

On peut voir aisément que l'*Encyclopédie* ainsi conçue, ainsi réalisée, aura sa place dans toutes les bibliothèques publiques, universitaires et scolaires, dans les laboratoires, entre les mains

des savants, des industriels et de tous les hommes instruits qui veulent se tenir au courant des progrès, dans la partie qu'ils cultivent eux-mêmes ou dans tout le domaine scientifique. Elle fera jurisprudence, ce qui lui dicte le devoir d'impartialité qu'elle aura à remplir.

Il n'est plus possible de vivre dans la société moderne en ignorant les diverses formes de cette activité intellectuelle qui révolutionne les conditions de la vie ; et l'interdépendance de la science ne permet plus aux savants de rester cantonnés, spécialisés dans un étroit domaine. Il leur faut,— et cela leur est souvent difficile, — se mettre au courant des recherches voisines. A tous, l'*Encyclopédie* offre un instrument unique dont la portée scientifique et sociale ne peut échapper à personne.

IV

CLASSIFICATION DES MATIÈRES SCIENTIFIQUES

La division de l'*Encyclopédie* en Bibliothèques a rendu nécessaire l'adoption d'une classification des sciences, où se manifeste nécessairement un certain arbitraire, étant donné que les sciences se distinguent beaucoup moins par les différences de leurs objets que par les divergences des aperçus et des habitudes de notre esprit. Il se produit en pratique des interpénétrations réciproques entre leurs domaines, en sorte que, si l'on donnait à chacun l'étendue à laquelle il peut se croire en droit de prétendre, il envahirait tous les territoires voisins ; une limitation assez stricte est nécessitée par le fait même de la juxtaposition de plusieurs sciences.

Le plan choisi, sans viser à constituer une synthèse philosophique des sciences, qui ne pourrait être que subjective, a tendu pourtant à échapper dans la mesure du possible aux habitudes traditionnelles d'esprit, particulièrement à la routine didactique, et à s'inspirer de principes rationnels.

Il y a deux grandes divisions dans le plan général de l'*Encyclopédie :* d'un côté les sciences pures, et, de l'autre, toutes les technologies qui correspondent à ces sciences dans la sphère des applications. A part et au début, une Bibliothèque d'introduc-

tion générale est consacrée à la philosophie des sciences (histoire des idées directrices, logique et méthodologie).

Les sciences pures et appliquées présentent en outre une division générale en sciences du monde inorganique et en sciences biologiques. Dans ces deux grandes catégories, l'ordre est celui de particularité croissante, qui marche parallèlement à une rigueur décroissante. Dans les sciences biologiques pures enfin, un groupe de sciences s'est trouvé mis à part, en tant qu'elles s'occupent moins de dégager des lois générales et abstraites que de fournir des monographies d'êtres concrets, depuis la paléontologie jusqu'à l'anthropologie et l'ethnographie.

Étant donnés les principes rationnels qui ont dirigé cette classification, il n'y a pas lieu de s'étonner de voir apparaître des groupements relativement nouveaux, une biologie générale, — une physiologie et une pathologie végétales, distinctes aussi bien de la botanique que de l'agriculture, — une chimie physique, etc.

En revanche, des groupements hétérogènes se disloquent pour que leurs parties puissent prendre place dans les disciplines auxquelles elles doivent revenir. La géographie, par exemple, retourne à la géologie, et il y a des géographies botanique, zoologique, anthropologique, économique, qui sont étudiées dans la botanique, la zoologie, l'anthropologie, les sciences économiques.

Les sciences médicales, immense juxtaposition de tendances très diverses, unies par une tradition utilitaire, se désagrègent en des sciences ou des techniques précises ; la pathologie, science de lois, se distingue de la thérapeutique ou de l'hygiène, qui ne sont que les applications des données générales fournies par les sciences pures, et à ce titre mises à leur place rationnelle.

Enfin, il a paru bon de renoncer à l'anthropocentrisme qui exigeait une physiologie humaine, une anatomie humaine, une embryologie humaine, une psychologie humaine. L'homme est intégré dans la série animale dont il est un aboutissant. Et ainsi, son organisation, ses fonctions, son développement, s'éclairent de toute l'évolution antérieure et préparent l'étude des formes plus complexes des groupements organiques qui sont offerts par l'étude des sociétés.

On peut voir que, malgré la prédominance de la préoccupation pratique dans ce classement des Bibliothèques de l'*Encyclopédie scientifique*, le souci de situer rationnellement les sciences dans leurs rapports réciproques n'a pas été négligé. Enfin il est à peine besoin d'ajouter que cet ordre n'implique nullement une hiérarchie, ni dans l'importance ni dans les difficultés des diverses sciences. Certaines, qui sont placées dans la technologie, sont d'une complexité extrême, et leurs recherches peuvent figurer parmi les plus ardues.

Prix de la publication. — Les volumes, illustrés pour la plupart, seront publiés dans le format in-18 jésus et cartonnés. De dimensions commodes, ils auront 400 pages environ, ce qui représente une matière suffisante pour une monographie ayant un objet défini et important, établie du reste selon l'économie du projet qui saura éviter l'émiettement des sujets d'exposition. Le prix étant fixé uniformément à 5 francs, c'est un réel progrès dans les conditions de publication des ouvrages scientifiques, qui, dans certaines spécialités, coûtent encore si cher.

TABLE DES BIBLIOTHÈQUES

DIRECTEUR : Dr TOULOUSE, Directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : H. PIÉRON, agrégé de l'Université.

DIRECTEURS DES BIBLIOTHÈQUES :

1. *Philosophie des Sciences.* P. PAINLEVÉ, de l'Institut, professeur à la Sorbonne.

I. SCIENCES PURES

A. Sciences mathématiques :

2. *Mathématiques* . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers.
3. *Mécanique* . . . . . J. DRACH, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Poitiers.

B. Sciences inorganiques :

4. *Physique.* . . . . . A. LEDUC, professeur adjoint de physique à la Sorbonne.
5. *Chimie physique.* . . J. PERRIN, chargé de cours à la Sorbonne.
6. *Chimie* . . . . . A. PICTET, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève.
7. *Astronomie et Physique céleste.* . . . . . J. MASCART, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris.
8. *Météorologie* . . . . J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
9. *Minéralogie et Pétrographie* . . . . . A. LACROIX, de l'Institut, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
10. *Géologie* . . . . . M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
11. *Océanographie physique.* . . . . . J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.

C. Sciences biologiques normatives :

12. *Biologie*	A. *Biologie générale.*	M. CAULLERY, professeur adjoint à la Sorbonne.
	B. *Océanographie biologique.*	J. RICHARD, directeur du Musée Océanographique de Monaco.
13. *Physique biologique.*		A. IMBERT, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Montpellier.
14. *Chimie biologique*		G. BERTRAND, chargé de cours à la Sorbonne.
15. *Physiologie et Pathologie végétales*		L. MANGIN, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
16. *Physiologie.*		J.-P. LANGLOIS, professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Paris.
17. *Psychologie.*		E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
18. *Sociologie*		G. RICHARD, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Bordeaux.
19. *Microbiologie et Parasitologie.*		A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
20. *Pathologie.*	A. *Pathologie médicale.*	M. KLIPPEL, médecin des Hôpitaux de Paris.
	B. *Neurologie.*	E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
	C. *Path. chirurgicale.*	L. PICQUÉ, chirurgien des Hôpitaux de Paris.

D. Sciences biologiques descriptives :

21. *Paléontologie*		M. BOULE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
22. *Botanique.*	A. *Généralités et phanérogames.*	H. LECOMTE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
	B. *Cryptogames.*	L. MANGIN, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
23. *Zoologie*		G. LOISEL, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.

24. *Anatomie et Embryologie*	G. LOISEL, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études.
25. *Anthropologie et Ethnographie*	G. PAPILLAULT, directeur adjoint du Laboratoire d'Anthropologie à l'École des Hautes-Études, professeur à l'École d'Anthropologie.
26. *Économie politique* . .	D. BELLET, professeur à l'École des Sciences politiques.

II. SCIENCES APPLIQUÉES

A. Sciences mathématiques :

27. *Mathématiques appliquées*	M. D'OCAGNE, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École polytechnique.
28. *Mécanique appliquée et génie*	M. D'OCAGNE, professeur à l'École des Ponts et Chaussées, répétiteur à l'École polytechnique.

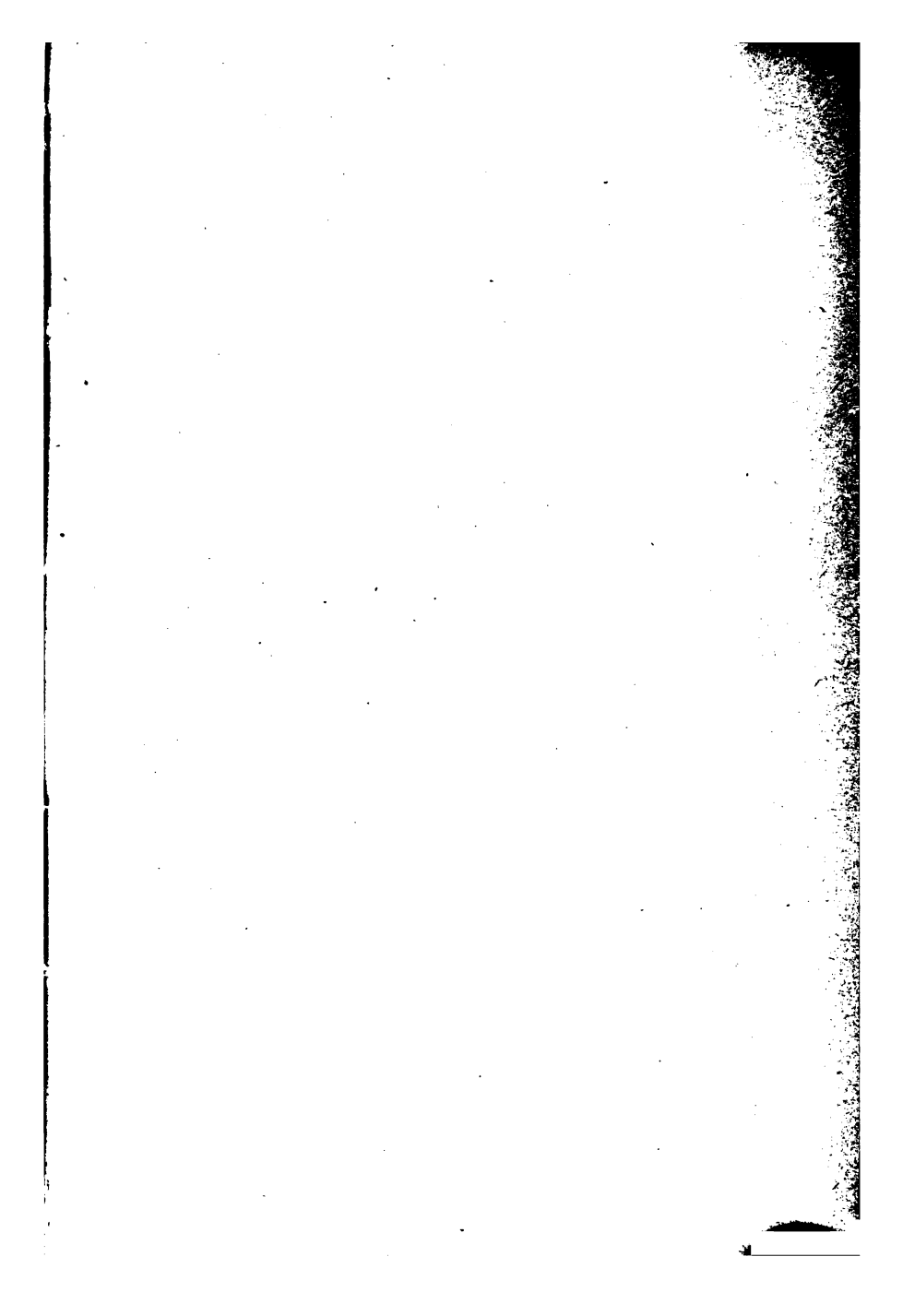
B. Sciences inorganiques :

29. *Industries physiques* .	H. CHAUMAT, sous-directeur de l'École supérieure d'Électricité de Paris.
30. *Photographie*	A. SEYEWETZ, sous-directeur de l'École de Chimie industrielle de Lyon.
31. *Industries chimiques*. .	J. DERÔME, professeur agrégé de physique au collège Chaptal, inspecteur des Établissements classés.
32. *Géologie et minéralogie appliquées*	L. CAYEUX, professeur à l'Institut national agronomique, professeur de géologie à l'École des Mines.
33. *Construction*	J. PILLET, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers et à l'École des Beaux-Arts.

C. Sciences biologiques :

34. *Industries biologiques*.	G. BERTRAND, chargé de cours à la Sorbonne.
35. *Botanique appliquée et agriculture*	H. LECOMTE, professeur au Muséum d'Histoire naturelle.
36. *Zoologie appliquée* . .	R. BARON, professeur à l'École vétérinaire d'Alfort.

37. *Thérapeutique générale et pharmacologie.* .	G. POUCHET, membre de l'Académie de médecine, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université de Paris.
38. *Hygiène et médecine publiques*	A. CALMETTE, professeur à la Faculté de Médecine de l'Université, directeur de l'Institut Pasteur de Lille.
39. *Psychologie appliquée.*	E. TOULOUSE, directeur de Laboratoire à l'École des Hautes-Études, médecin en chef de l'asile de Villejuif.
40. *Sociologie appliquée.* .	TH. RUYSSEN, professeur à la Faculté des Lettres de l'Université de Dijon.

M. ALBERT MAIRE, bibliothécaire à la Sorbonne, est chargé de l'*Index* de l'Encyclopédie scientifique.

33165. — Tours, impr. Mame.